Physique de la Musique

Cours du 25 novembre et du 2 décembre 2019

Du κανών de Pythagore à l'orgue en passant par le clavecin et le piano-forte. Systèmes de division de l'octave et leurs qualités musicales

Dirk van der Marel

Du kanon de Pythagore à l'orgue en passant par le clavecin et le piano-forte. Systèmes de division de l'octave et leurs qualités musicales

1.1 Le monocorde
1.2 Théorie des cordes I: Cordes souples
1.3 Les lois de Mersenne, l'equation d'Alembert
1.4 Spectre harmonique d'une corde tendue
1.5 Le κανών de Pythagore
1.6 Echelles logarithmiques des fréquences
1.7 Intervalles pures

2.1 Instruments à clavier : Clavecin, clavicorde, piano-forte
2.2 Théorie des cordes II: Cordes rigides
2.3 Piano moderne: cordes rigides
2.4 L'orgue

3.1 La notation musicale
3.2 Microtonalité: Le comma pythagoricien
3.3 Microtonalité: Le comma synthonique
3.4 Microtonalité: Migration tonale
3.5 Evolution du système tonal
3.6 Moyen âge: Gamme pythagoricienne, gammes « justes »
3.7 Renaissance: Tempéraments mésotoniques
3.8 De la Siècle des Lumières jusqu'au Romantisme : Tempéraments inégaux
3.9 Vingtième Siècle: Tempérament égal

1.1 Le monocorde

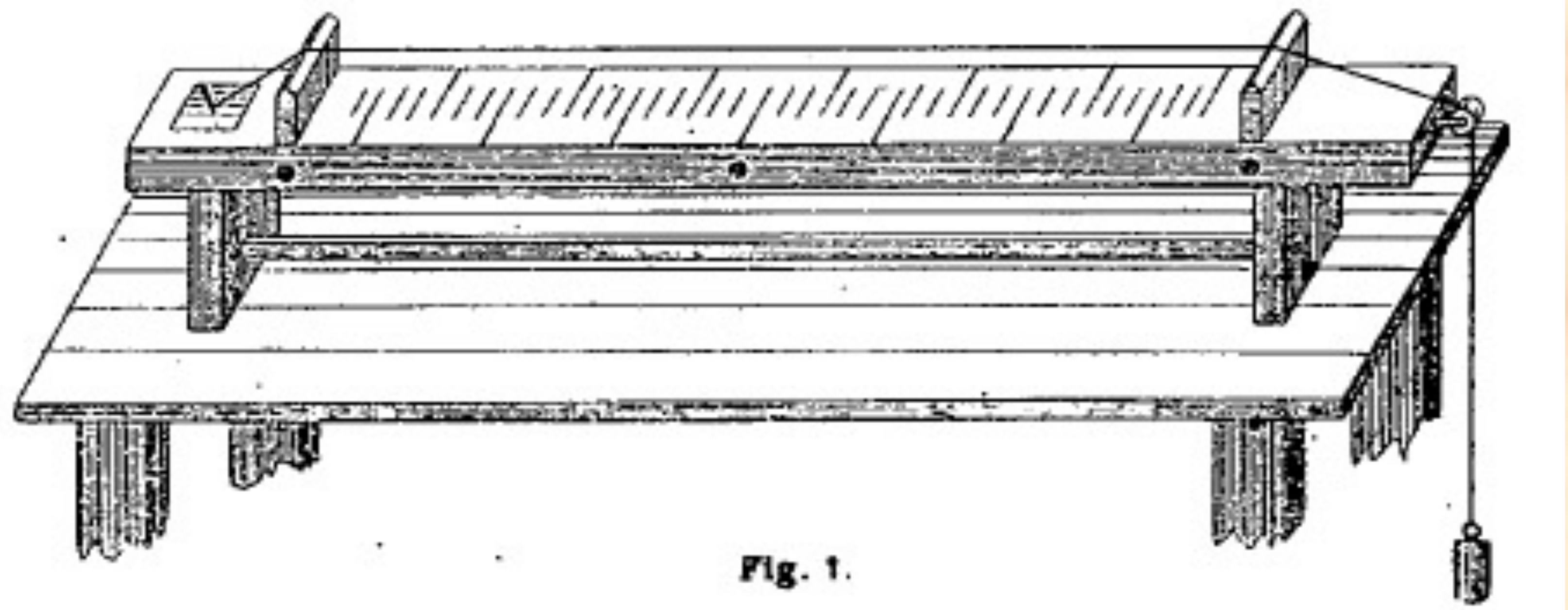


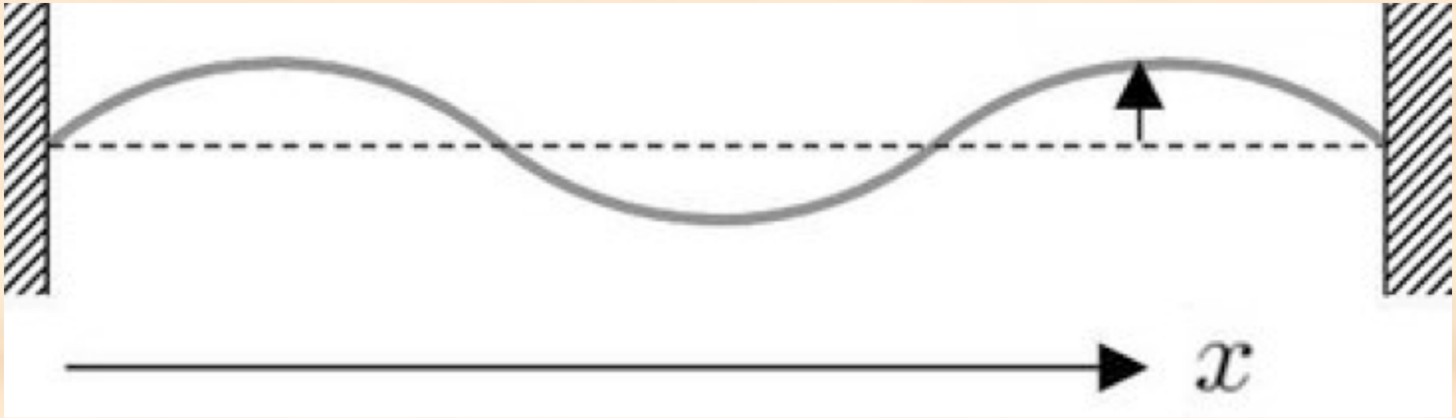
Fig. 1.

Le monocorde est mentionné dans des textes Sumeriennes. L’instrument était utilisé et peut-être réinventé par Pythagore 600 AEC.

1.2 Théorie des cordes I

Cordes souples

Corde tendue



Tension: T

Masse linéique: $\mu = M/L$

1.3 Marin Mersenne: Traité de l'harmonie universelle (1637)

Les lois de Mersenne

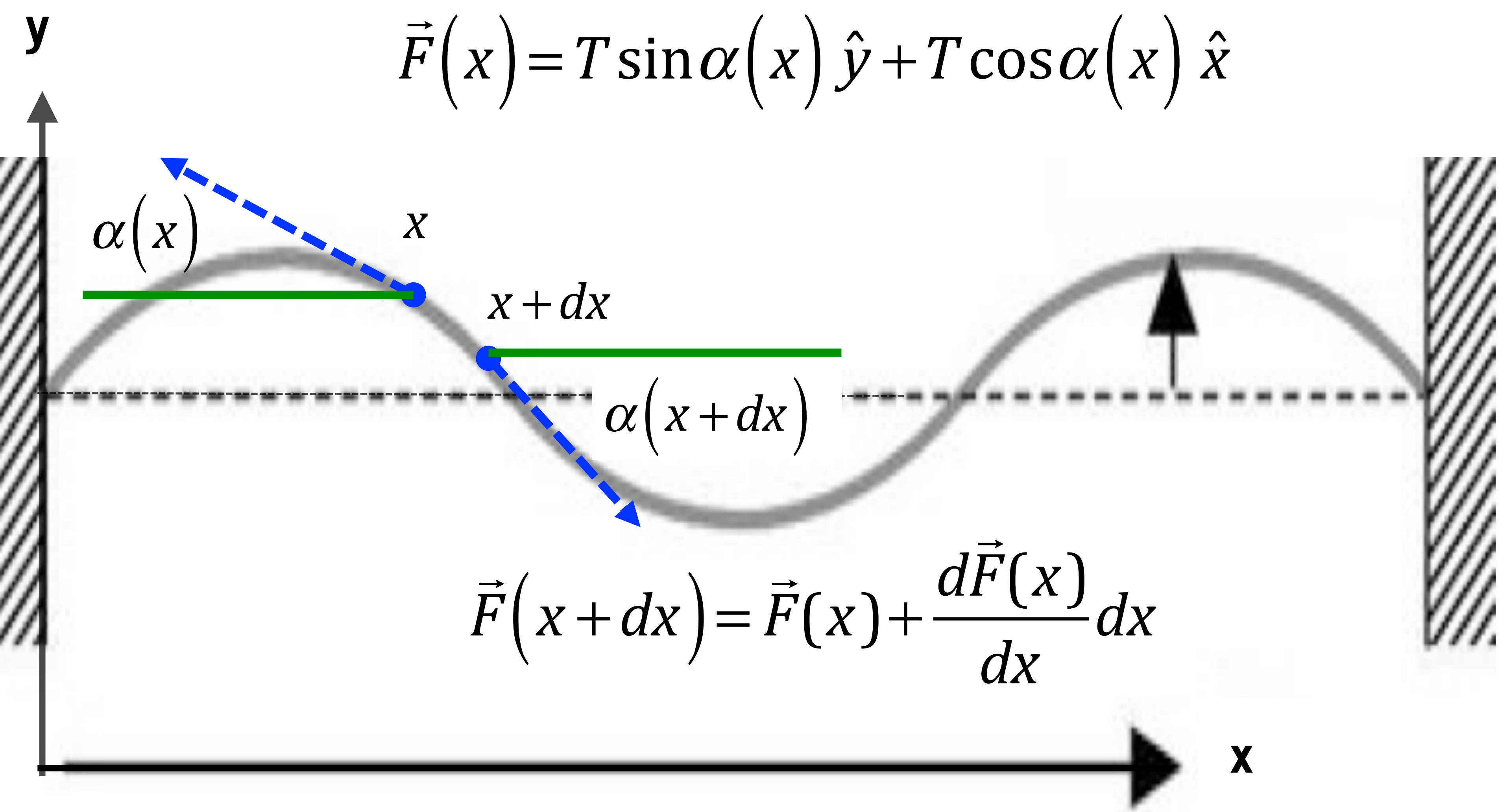
1) Quand la longueur d’une corde est variée, tandis que la tension et la corde elle-même restent inchangées, la période de la vibration est proportionnel à la longuer de la corde (loi de Pythagore).

2) Quand la tension est variée, tandis que la longueur et la corde restent inchangées, la fréquence des vibrations est proportionnel à la racine de la tension.

3) Pour des cordes différentes de la même longueur et en appliquant la même tension, la période de la vibration est proportionnel à la racine du poids de la corde.

1.4 Corde Tendue - Tension T appliquée aux extrémités

$$\vec{F}\left(x\right)=T\sin\alpha\left(x\right)\,\hat{y}+T\cos\alpha\left(x\right)\,\hat{x}$$



$$\vec{F}\left(x+dx\right)=\vec{F}(x)+\frac{d\vec{F}(x)}{dx}dx$$

Force de rappel sur le segment $\left\{x;x+dx\right\}$: $\dfrac{d\vec{F}(x)}{dx}dx$

Corde tendue

$$\vec{F}(x) = T\sin\alpha(x)\,\hat{y} + T\cos\alpha(x)\,\hat{x}$$

$$\frac{d\vec{F}(x)}{dx} = \frac{\partial \vec{F}(x)}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{F}(x)}{dx} = T\left(\hat{y}\cos\alpha - \hat{x}\sin\alpha\right)\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\partial y / \partial x\right)^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} << 1 \Rightarrow \alpha << 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos(\alpha) \simeq 1 \\ \sin(\alpha) << 1 \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \ldots \simeq \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ Force de rappel sur le segment $\{x;x+dx\}$:

$$\boxed{\frac{d\vec{F}(x)}{dx}dx = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\hat{y}\,dx}$$

Corde tendue

Masse du segment $\left\{x;x+dx\right\}$ de corde: μdx

Force d'inertie du segment $\left\{x;x+dx\right\}$: $d\vec{F}_i = \mu \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\hat{y}dx$

Loi de Newton: Force de rappel = Force d'inertie

Nous avons déjà vu que la force de rappel sur ce segment est: $d\vec{F}\left(x\right) = T\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\hat{y}dx$

$\Rightarrow$ Equation d'onde de la corde: $T\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\hat{y}dx = \mu \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\hat{y}dx$

$$\upsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \left(\text{equation d'Alembert}, 1747\right)$$

$\upsilon \equiv$ vitesse de propagation de la perturbation le long de la corde $= \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

Corde tendue

Equation d'onde de la corde:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Conditions aux limites

$$y(0,t) = 0$$

$$y(L,t) = 0$$

Solutions: $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos(\omega_n t - \varphi_n)\sin(k_n x)$ avec $\begin{cases} k_n = \dfrac{n\pi}{L} \\ \omega_n = k_n \upsilon = \sqrt{\dfrac{n^2\pi^2 T}{\mu L^2}} \end{cases}$

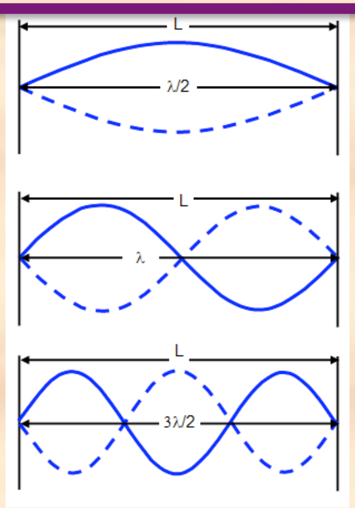
Les valeurs des coefficients y_n dépendent de la force avec laquelle –et l'endroit où– la corde est pincée/frottée/frappée

Corde tendue

Conditions aux limites: $y(0,t) = y(L,t) = 0$

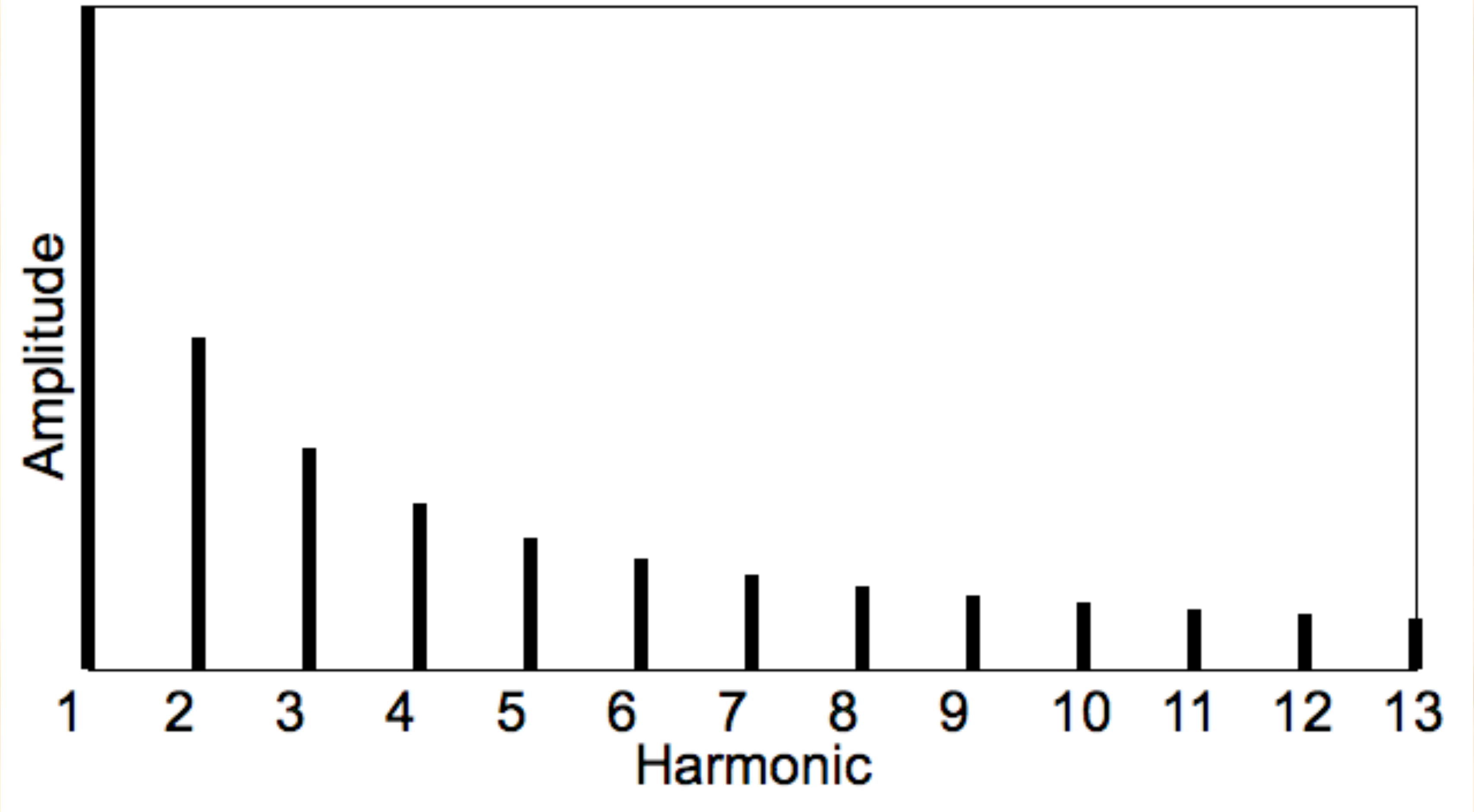
Modes propres: $\sqrt{\frac{2}{L}}\, y_n(t) \sin(k_n x)$

avec: $k_n = \frac{n\pi}{L}$



Spectre harmonique d'une corde tendue

(guitarre, luthe, violon, clavecin, etc)



Les valeurs des coefficients y_n dépendent de la force avec laquelle

–et l'endroit où– la corde est pincée/frottée/frappée

1.5 Le κανών de Pythagore

« Canon » en grec = la loi, la règle

Pythagore a fait la démonstration que la hauteur , du son est inversement proportionnelle à la longueur de la corde. De cette expérience, Pythagore tire les conclusions suivantes :

En plaçant le chevalet au milieu de la corde tendue, la corde donne une harmonie parfaite du son initial (l' « octave supérieure »).

En plaçant le chevalet au 2/3 de la corde, la corde donne une belle harmonie du son initial (la « quinte supérieure »).

Etc

L = longueur jusqu'au chevalet mobile en unités de L_0.

Pythagore était convaincu que tout phénomène pouvait être expliqué uniquement par les petits nombres naturels.

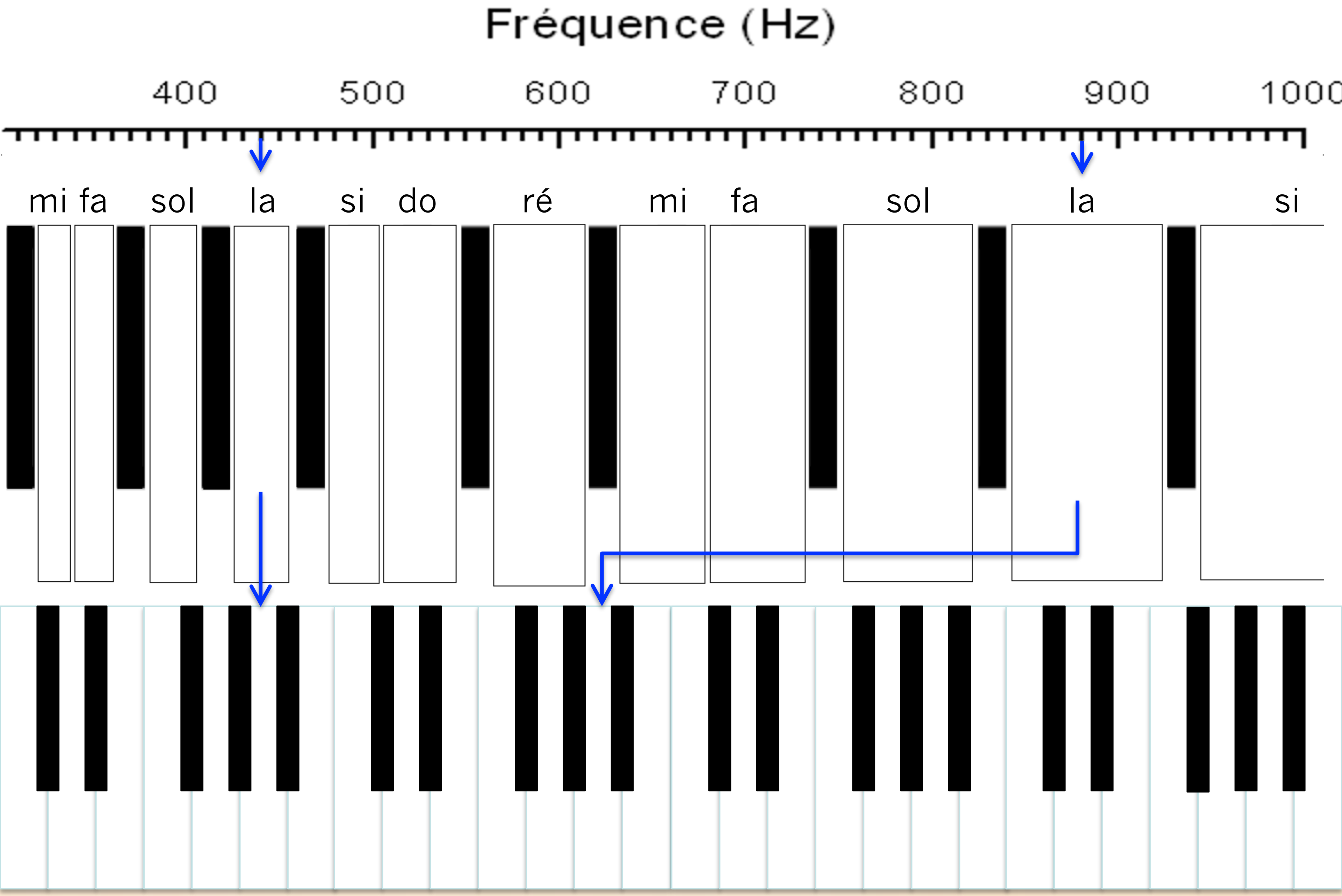
Commençons avec le do en mettant L(do)=L_0.

Nous arrivons ainsi au suivant heptacorde, la gamme dite "pure":

Note	L_0/L	Intervalle par rapport au do
do	1/1	unisson
ré	9/8	seconde = ton
mi	5/4	tierce majeure
fa	4/3	quarte*
sol	3/2	quinte*
la	5/3	sixte
si	15/8	septième
do’	2/1	octave*

***Pythagore fût le premier à établir les quatre consonances fondamentales de la gamme musicale que sont l'unisson (de rapport 1/1), l'octave (2/1), la quinte (3/2) et la quarte (4/3)**

1.6 Echelles logarithmiques des fréquences



Echelles logarithmiques des fréquences

1: L'échelle de Félix Savart (1791-1841)

$$\sigma(\omega_1,\omega_2)=1000\cdot\log_{10}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

2: L'échelle de Gaspard de Prony (1755-1839)

$$c(\omega_1,\omega_2)=1200\cdot\log_{2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

1 prony = 1 cent

1.7 Intervalles Pures	Proportion	Cents
unisson	**1/1**	**0.0**
±demi-ton		*~100*
seconde/ton-majeur	**9/8**	**203.9**
±demi-ton		*~300*
tierce majeure	**5/4**	**386.3**
quarte juste	**4/3**	**498.0**
±demi-ton		*~600*
quinte juste	**3/2**	**702.0**
±demi-ton		*~800*
sixte majeure	**5/3**	**884.4**
±demi-ton		*~1000*
septième majeure classique	**15/8**	**1088.3**
octave	**2/1**	**1200.0**

2.1 Instruments à clavier

Les cordes d'un clavecin

Le mécanique d'un clavecin

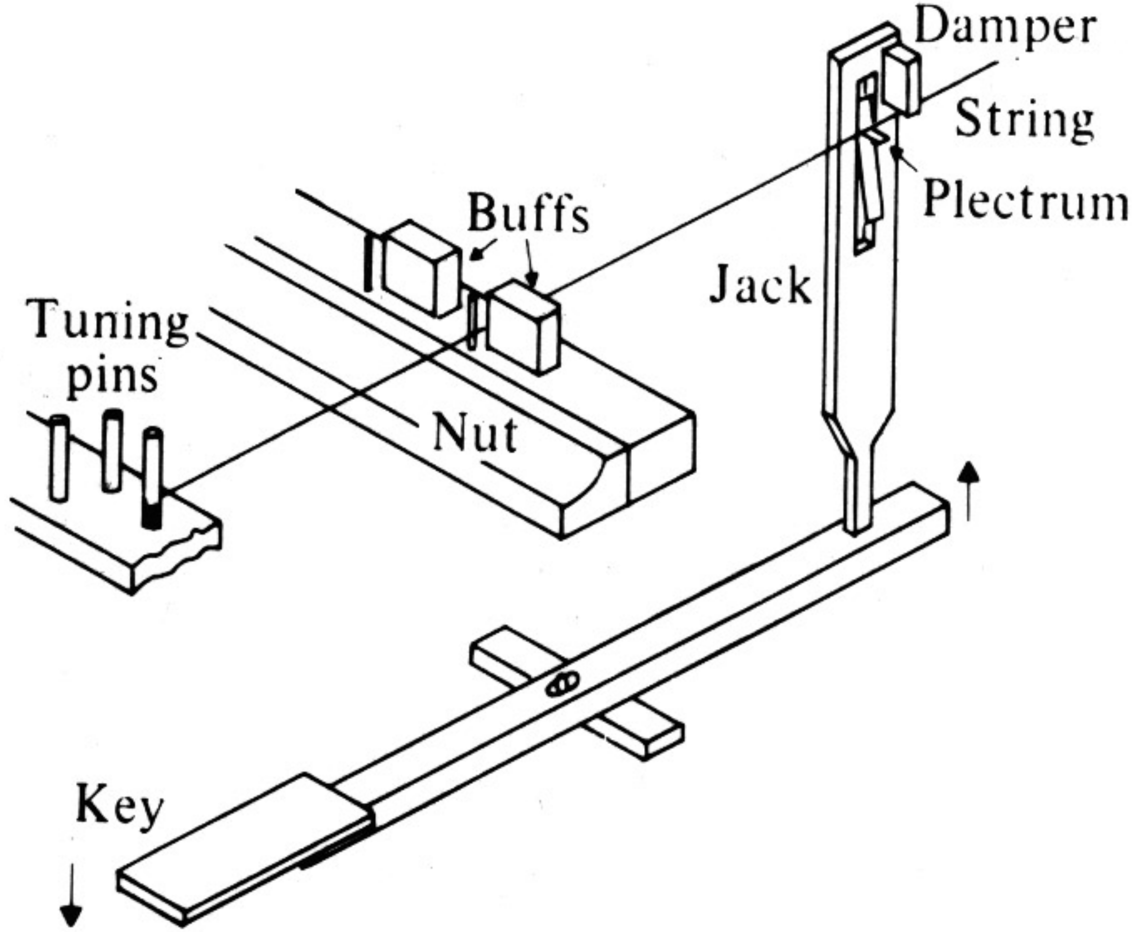
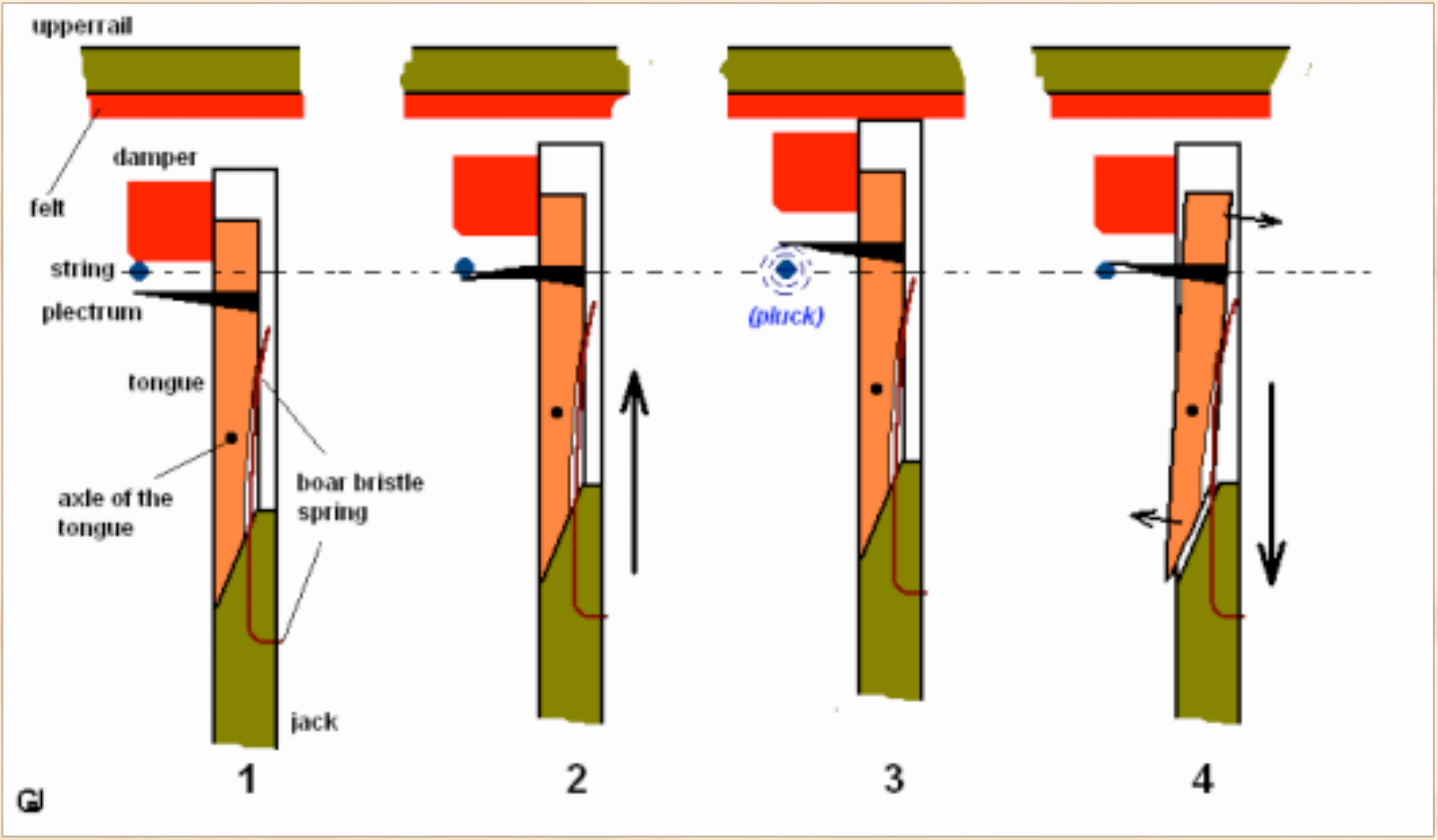
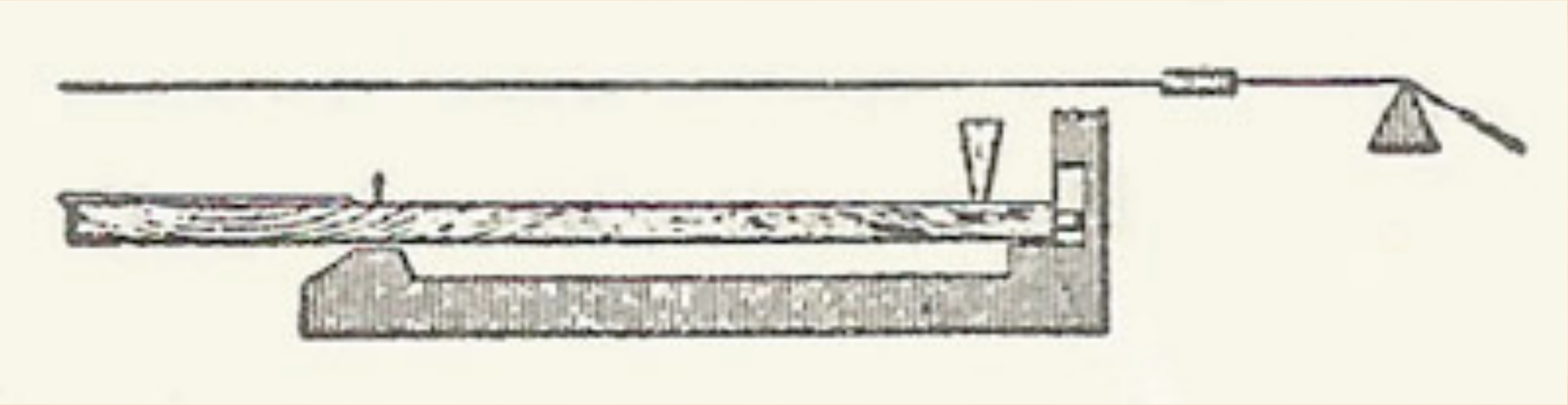


FIG. 14.8
Harpsichord action (simplified).

Le mécanique d'un clavecin



Le clavicorde



Le clavicorde

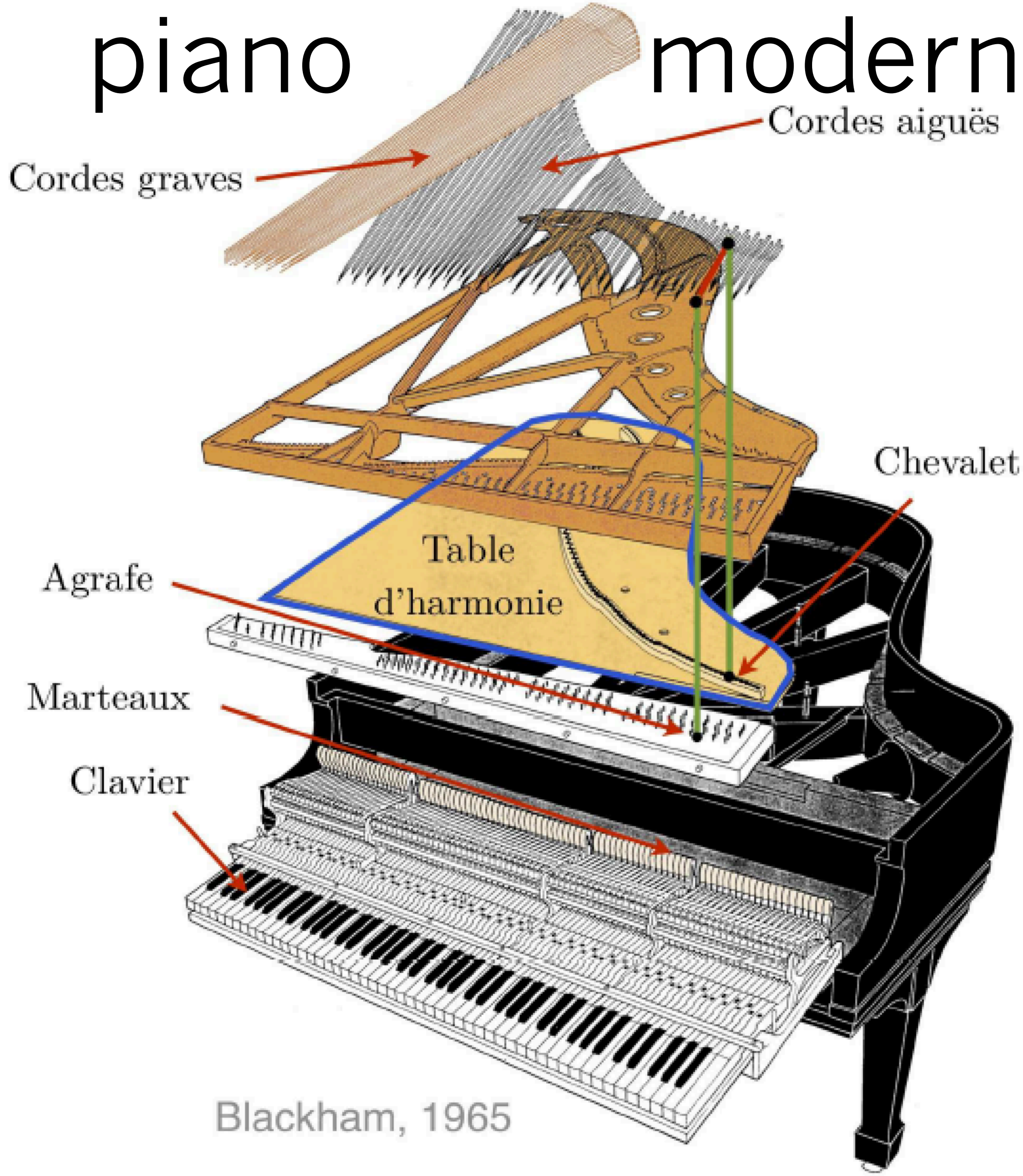
Clavichorde

Caspar Ferdinand Fischer

Prelude et Chaconne

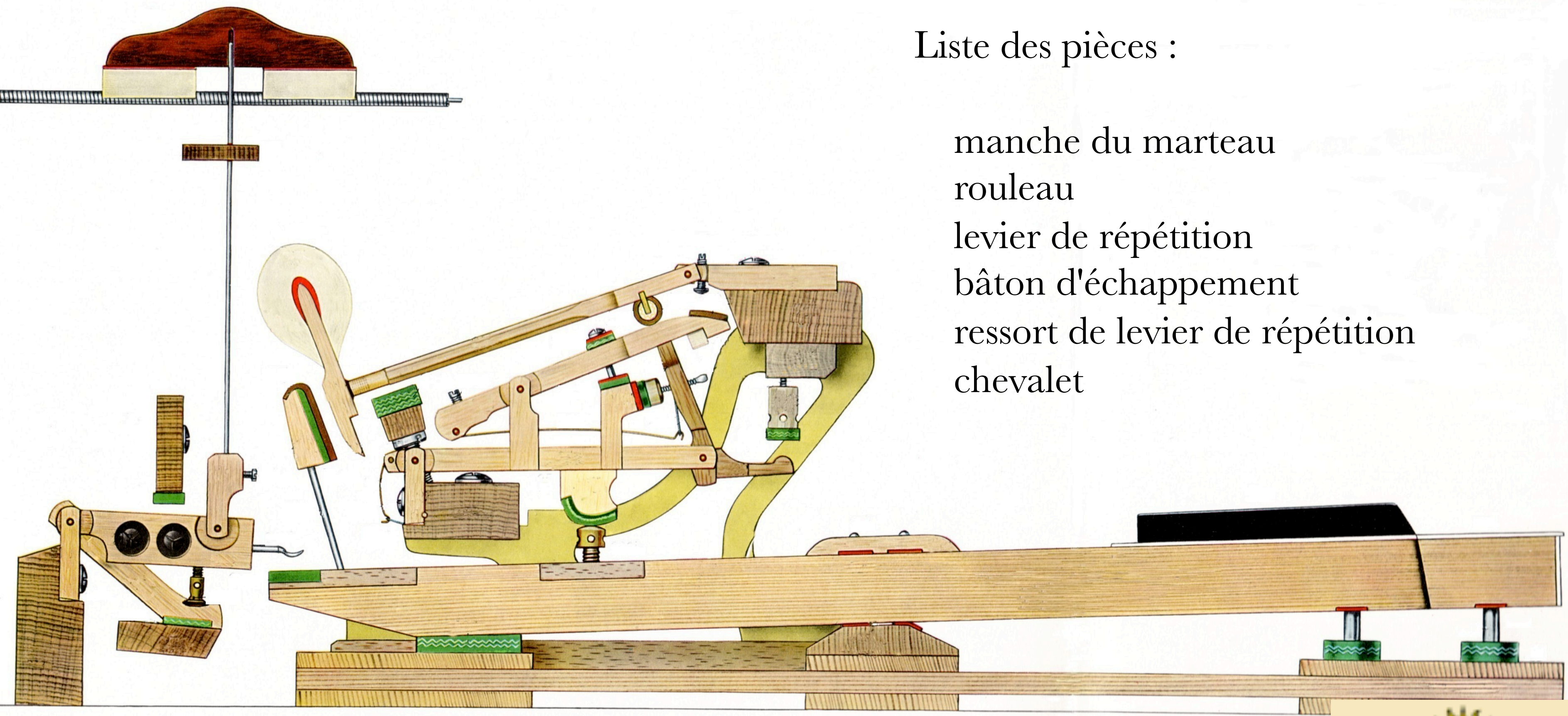
Le piano-forte

piano moderne



Blackham, 1965

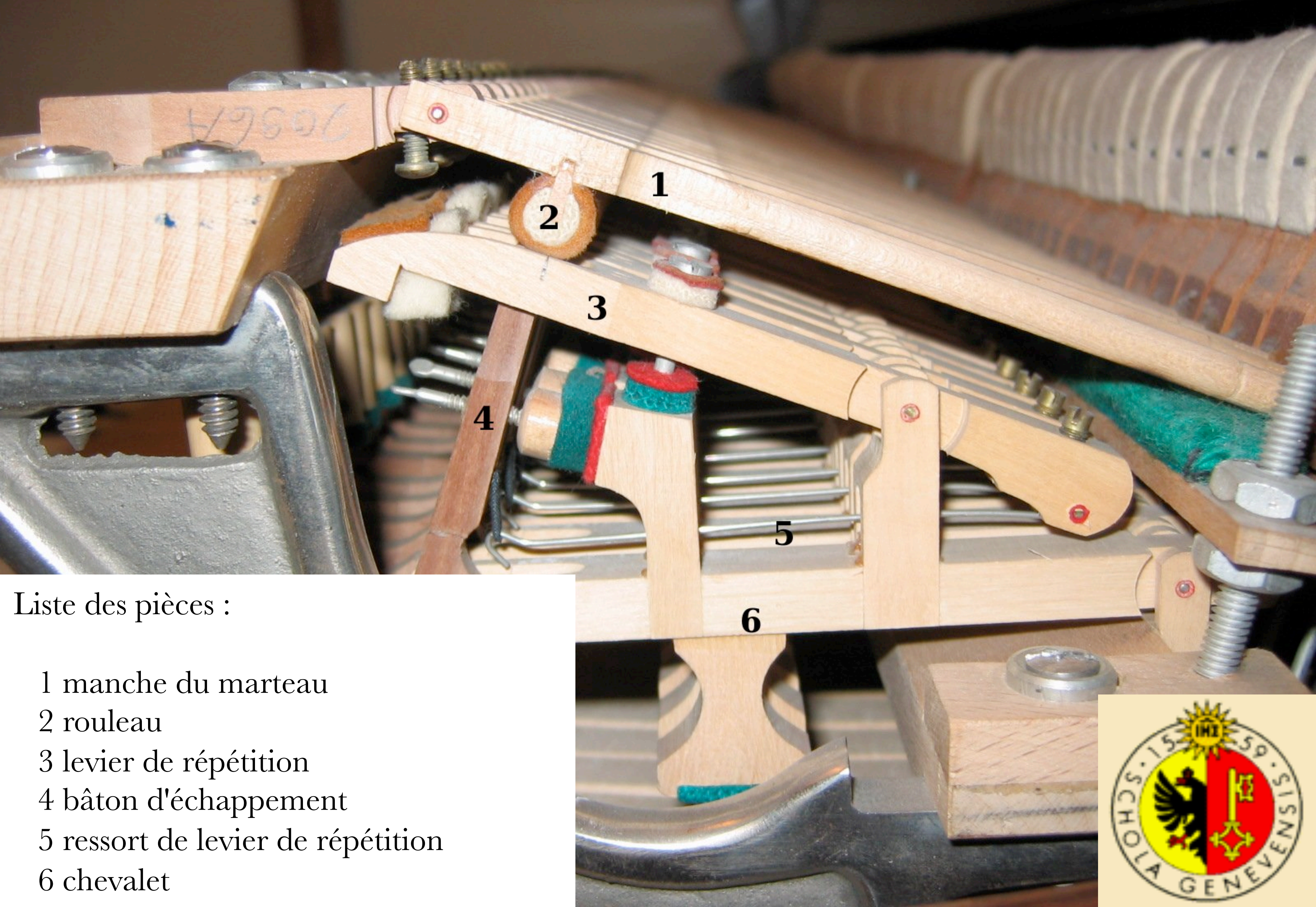
La mécanique du piano



Liste des pièces :

- manche du marteau
- rouleau
- levier de répétition
- bâton d'échappement
- ressort de levier de répétition
- chevalet

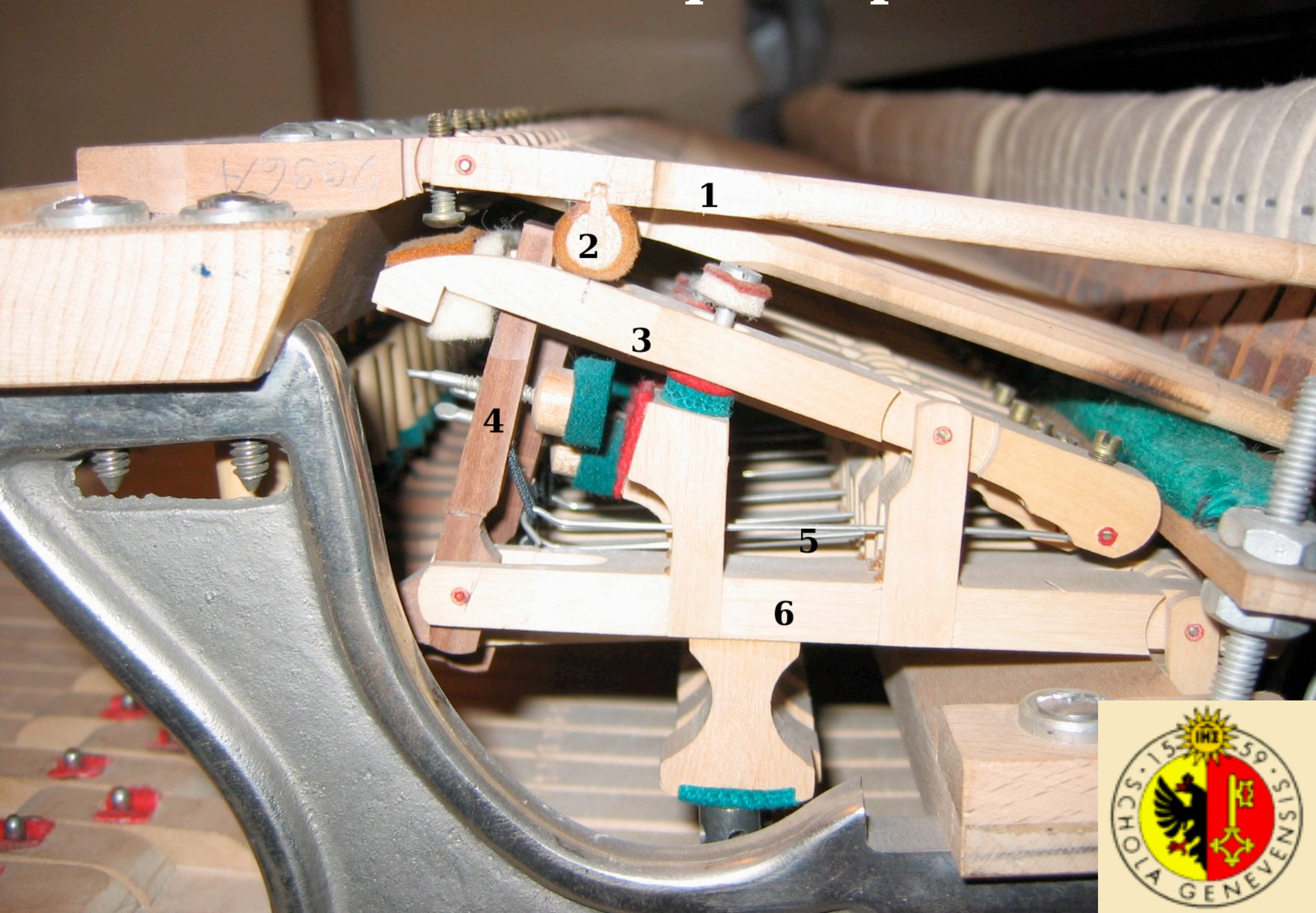
La mécanique du piano



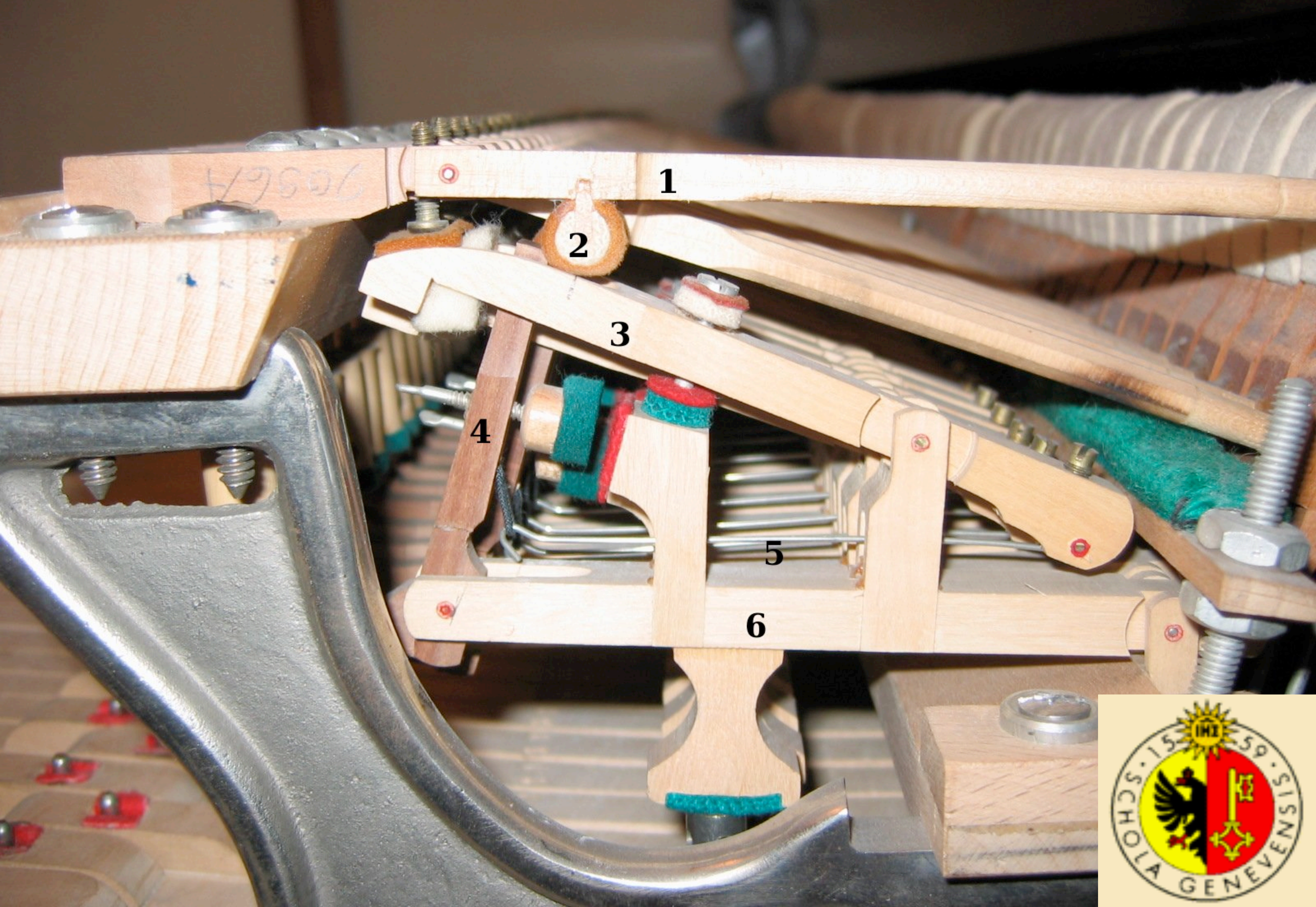
Liste des pièces :

1 manche du marteau
2 rouleau
3 levier de répétition
4 bâton d'échappement
5 ressort de levier de répétition
6 chevalet

La mécanique du piano

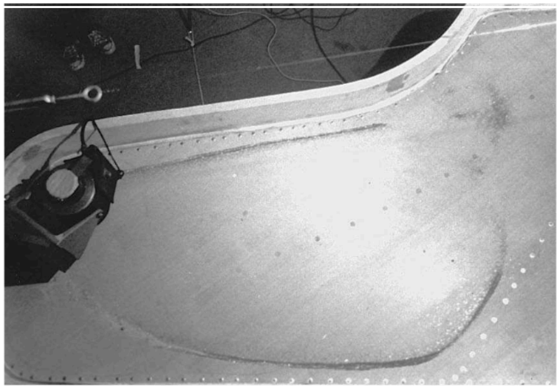


La mécanique du piano



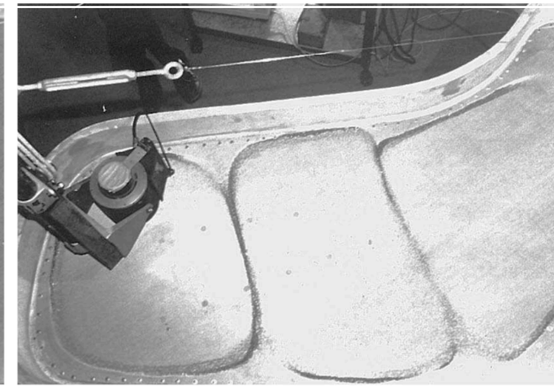
La mécanique du piano

La table harmonique

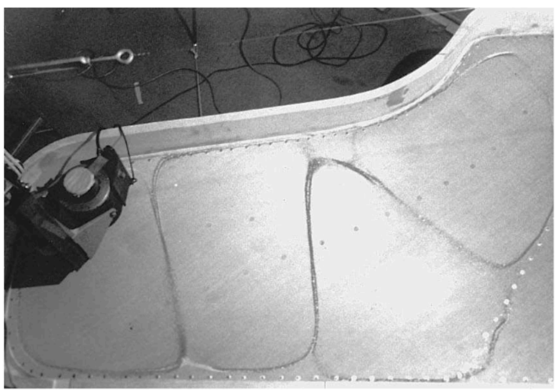


(a) Mode 1, 49 Hz

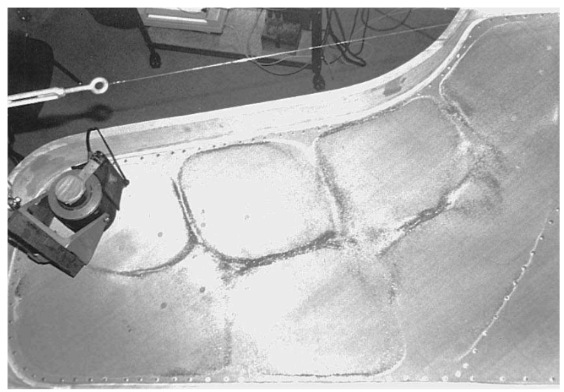
(b) Mode 2, 67 Hz



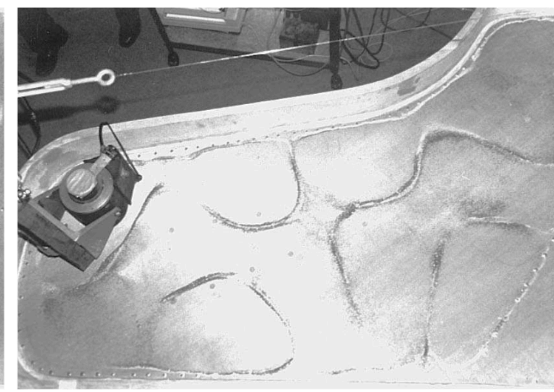
(c) Mode 3, 89 Hz



(d) Mode 4, 112 Hz



(e) 184 Hz

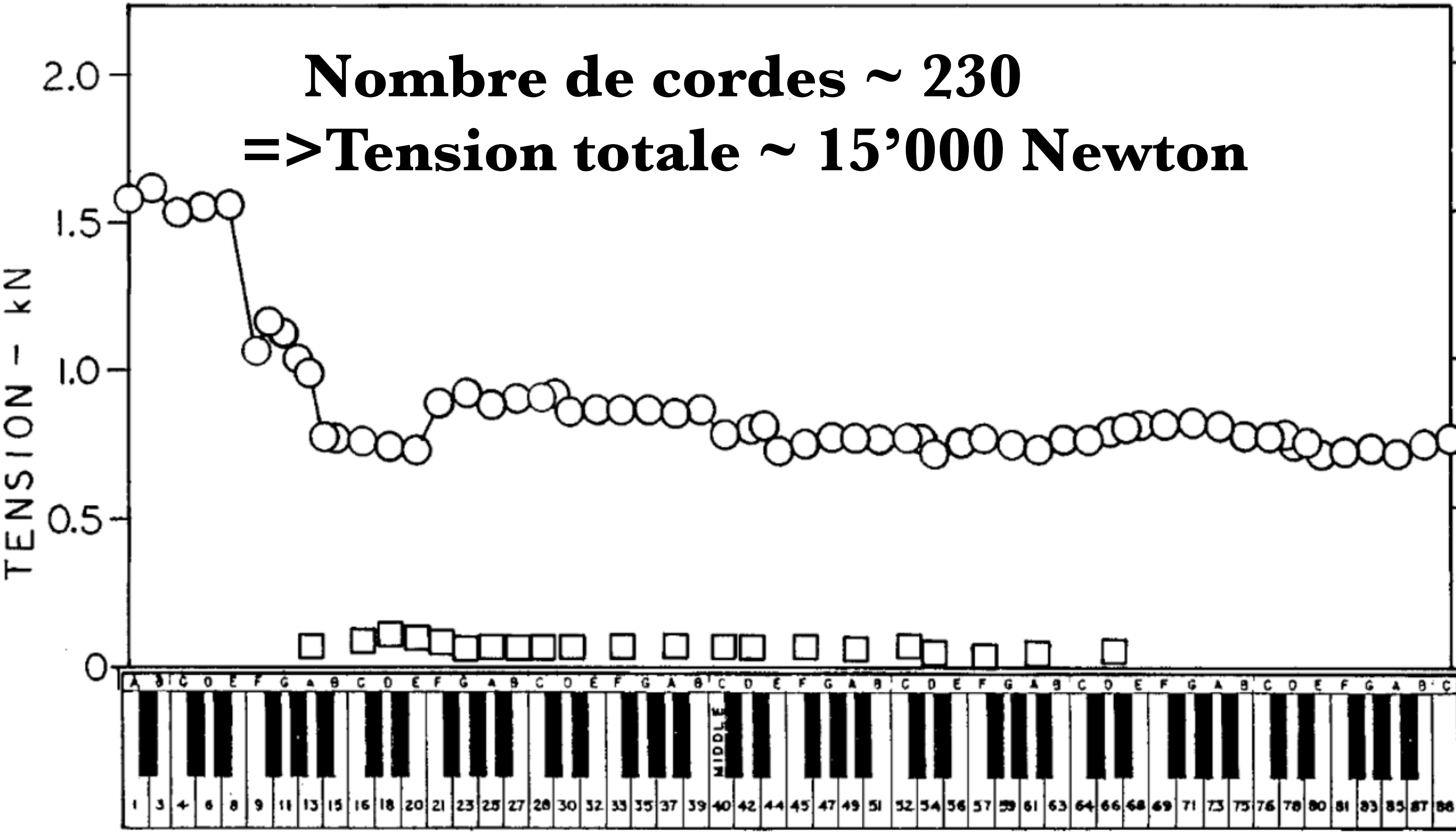


(f) 306 Hz

FIGURE I.42 – Figures de Chladni sur la table d'harmonie d'un piano de 2,74 mètres auquel on a retiré les cordes et le chevalet. Extrait de [Conklin, 1996b]

Les cordes d'un piano moderne

Tension sur les cordes d'un clavecin: 40 Newton
Tension sur les cordes d'un piano moderne: 700 Newton



Nombre de cordes ~ 230
=>Tension totale ~ 15'000 Newton

2.2 Théorie des cordes II

Cordes rigides

Cordes rigides

Equation d'onde d'une corde rigide: $$\upsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - g \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$g \propto$ Module de Young

Solution: nous essayons la substitution: $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)\psi_n(x)$

$$\Downarrow$$

$$\upsilon^2 y_n \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} - g y_n \frac{\partial^4 \psi_n}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2}\psi_n \qquad \Rightarrow \frac{1}{\psi_n}\left(\upsilon^2 \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} - g\frac{\partial^4 \psi_n}{\partial x^4}\right) = \frac{1}{y_n}\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2}$$

Essayons la substitution: $y_n(t) = y_n(0)\cos(\omega_n t - \varphi_n)$

ce qui donne $\frac{1}{y_n}\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} = -\omega_n^2$

Cordes rigides

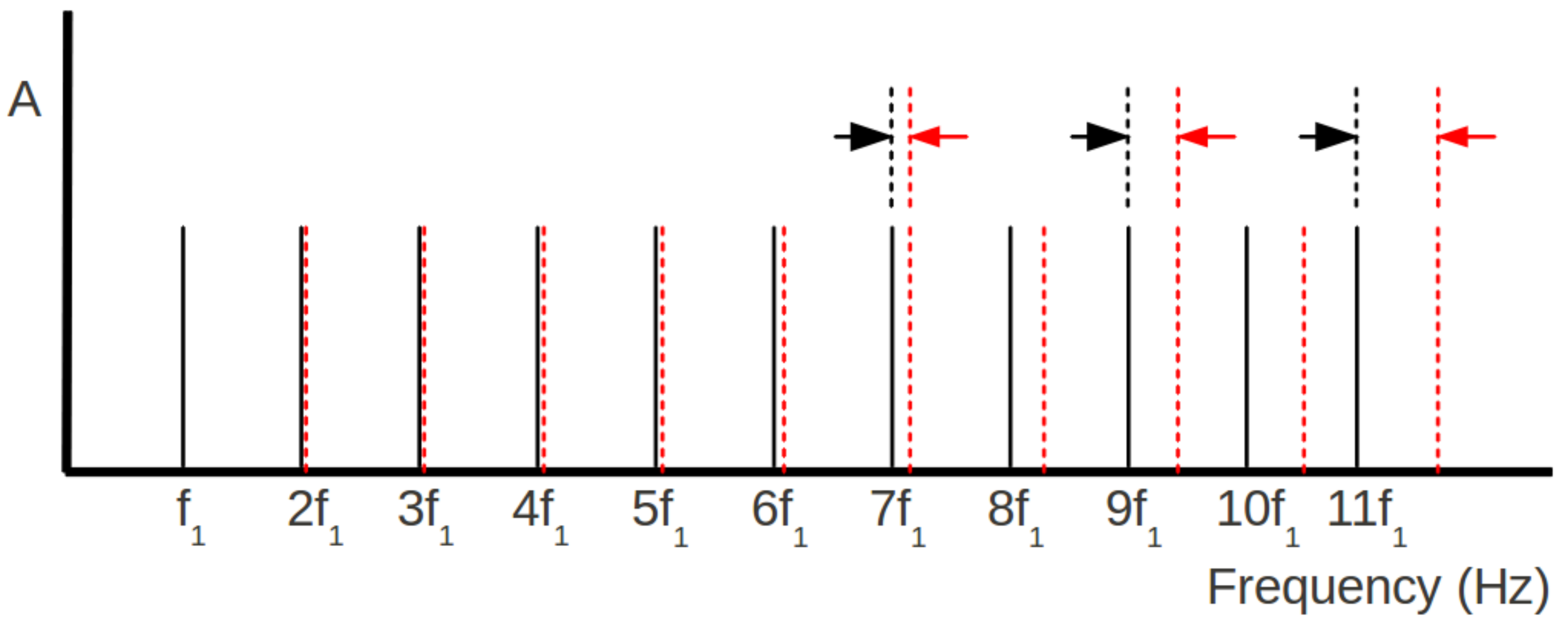
Equation aux valeurs propres: $$\frac{1}{\psi_n}\left(\upsilon^2\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2}-g\frac{\partial^4\psi_n}{\partial x^4}\right)=-\omega_n^2$$

Essayons la substitution: $$\psi_n=\sin\left(k_n x\right)\ \Rightarrow \upsilon^2 k_n^2+gk_n^4=\omega_n^2$$

Conditions aux limites: $$\left\{\begin{array}{l}\psi_n\left(0\right)=\ 0\\ \psi_n\left(L\right)=\ \sin\left(k_n L\right)=0\end{array}\right\}$$

Résultat: $$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\left(\omega_n t-\varphi_n\right)\sin\left(k_n x\right)\ \text{avec}\ \left\{\begin{array}{l}k_n=\dfrac{n\pi}{L}\\ \omega_n^2=n^2\omega_0^2\left(1+bn^2\right)\\ \omega_0=\dfrac{\pi\upsilon}{L}\quad;\quad b=\dfrac{g\pi^2}{L^2\upsilon^2}\end{array}\right.$$

Cordes rigides



2.3 Piano moderne: cordes rigides

School of Physics

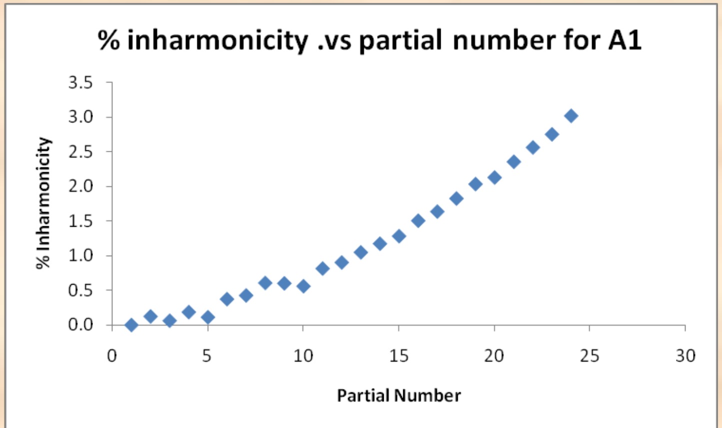
THE UNIVERSITY OF EDINBURGH

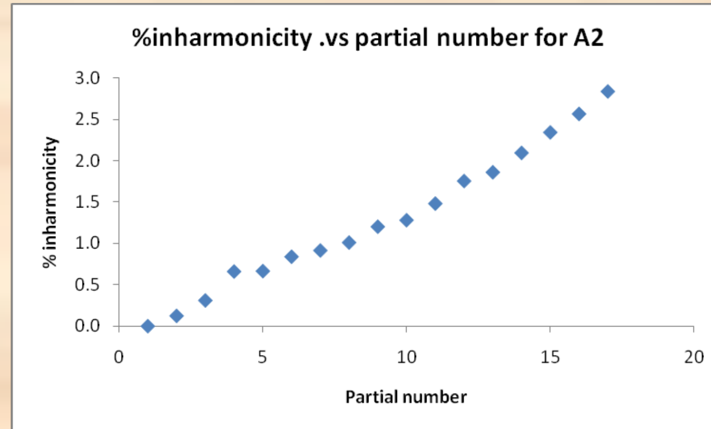
Masters in Acoustics & Music Technology

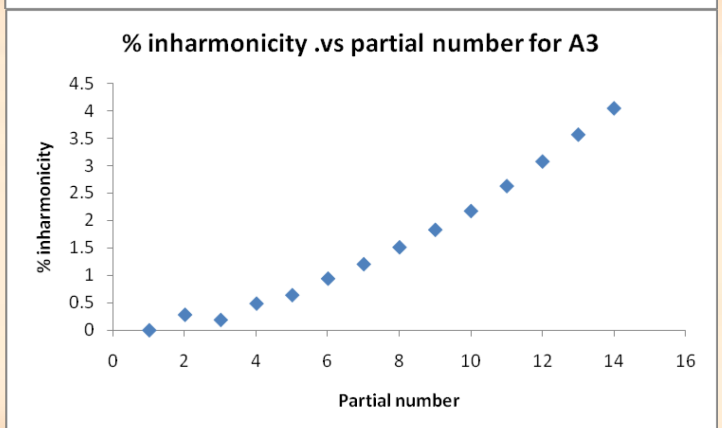
Inharmonicity of Piano Strings

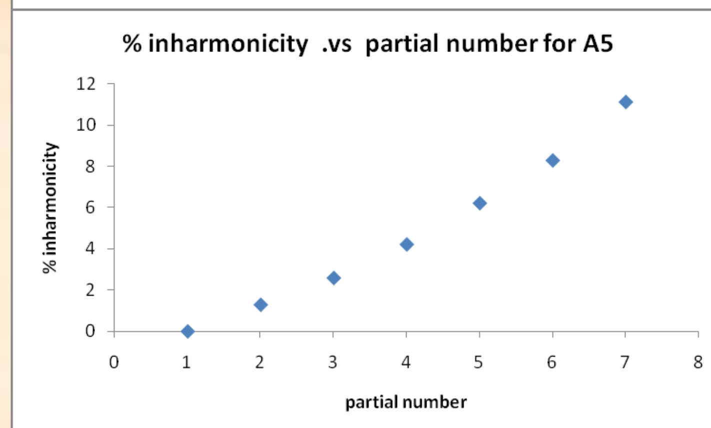
Simon Hendry, October 2008

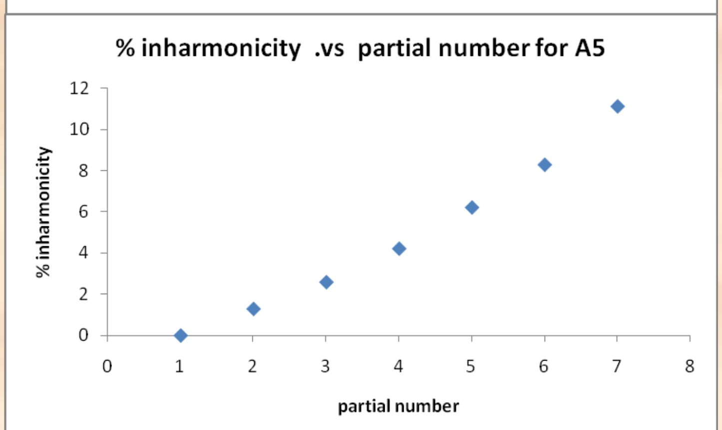
Piano moderne: cordes rigides

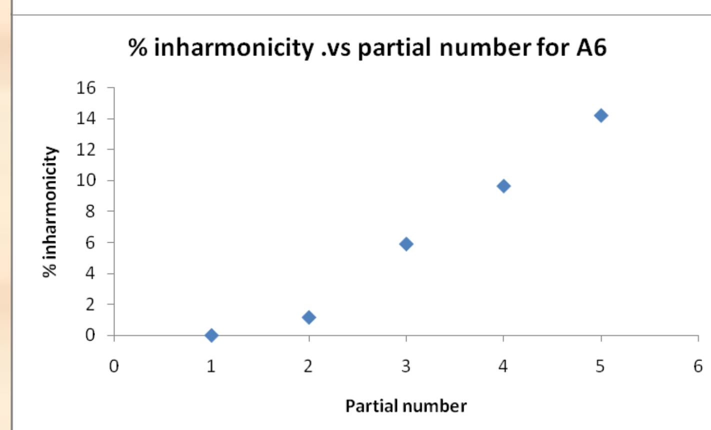




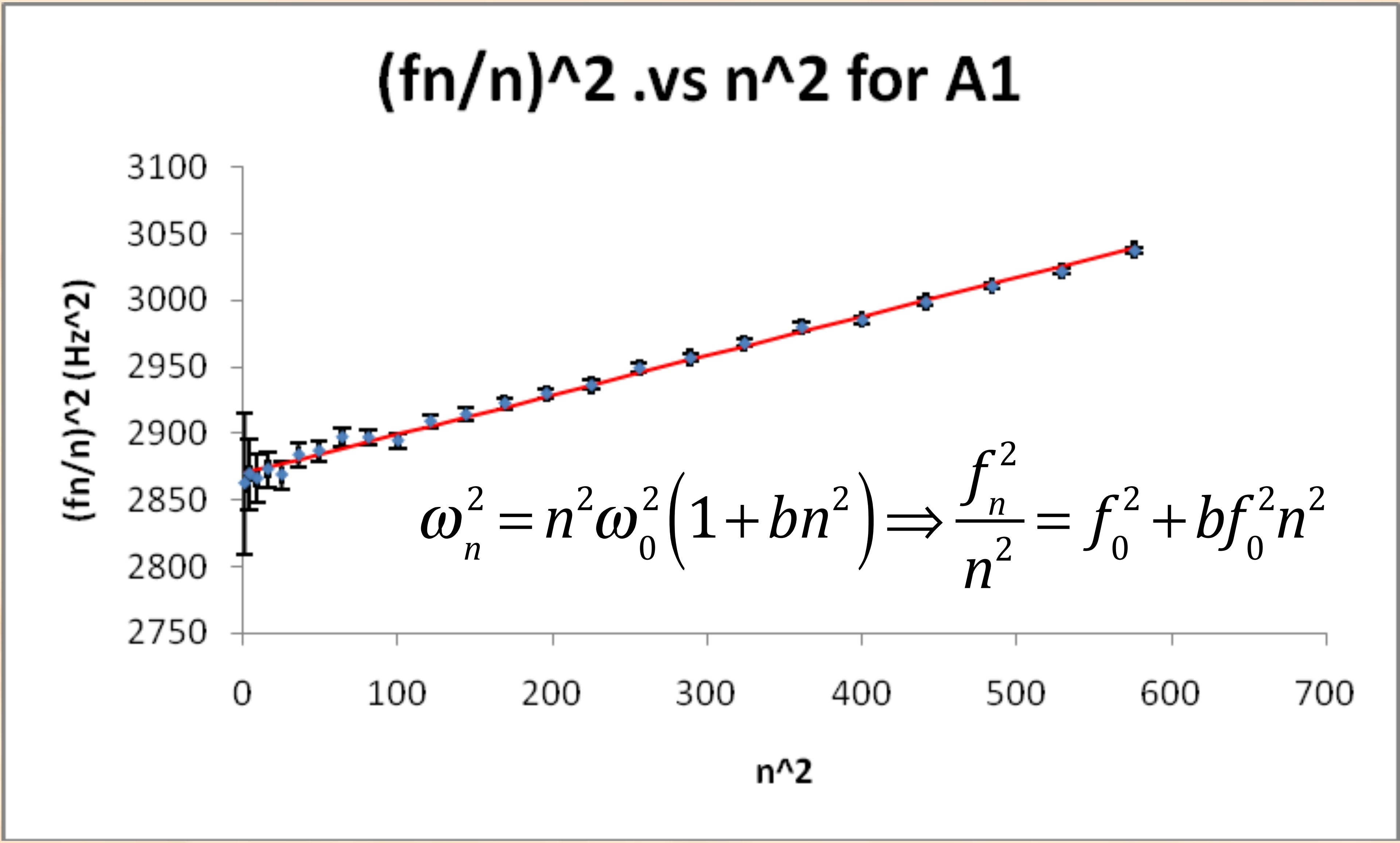




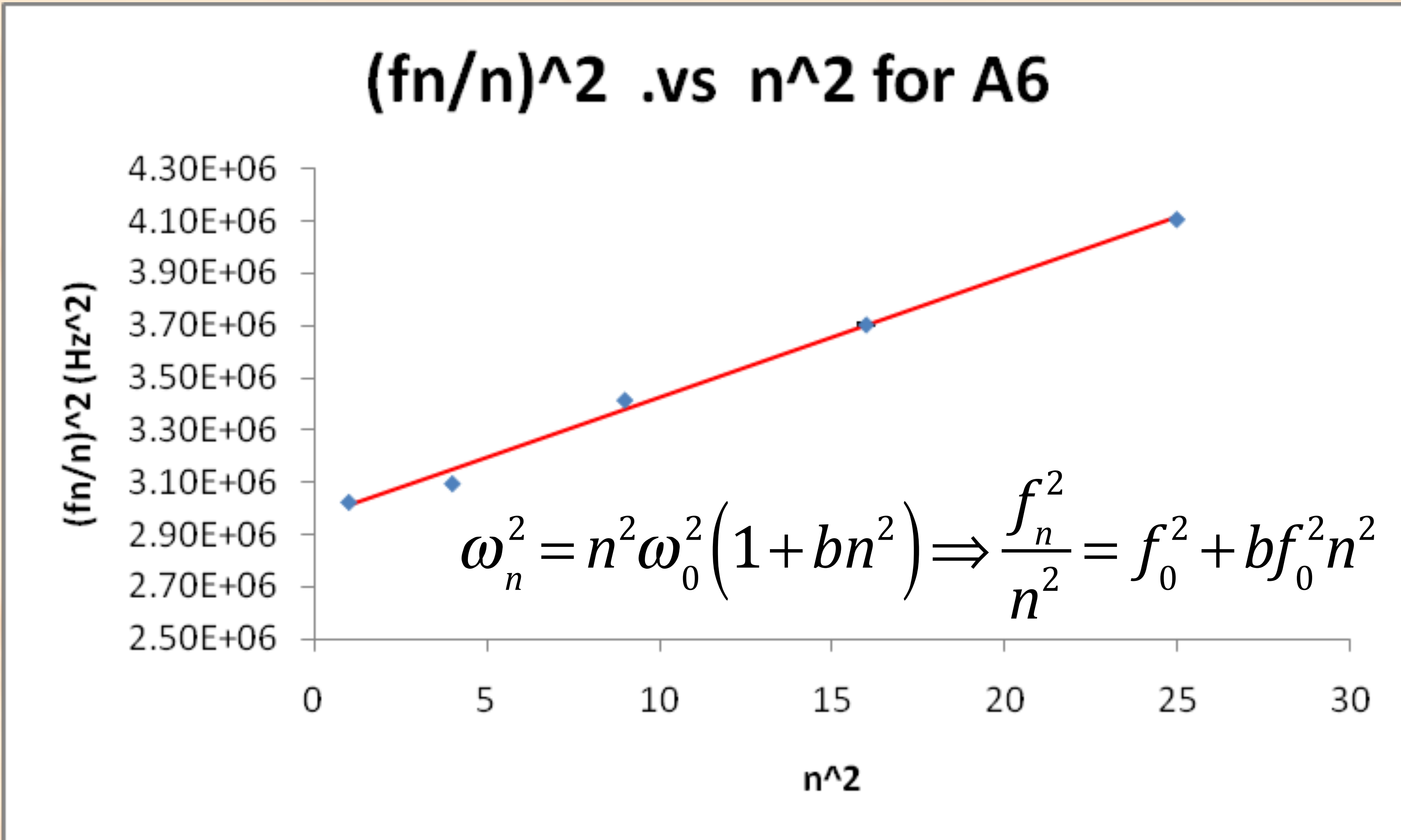




Piano moderne: cordes rigides

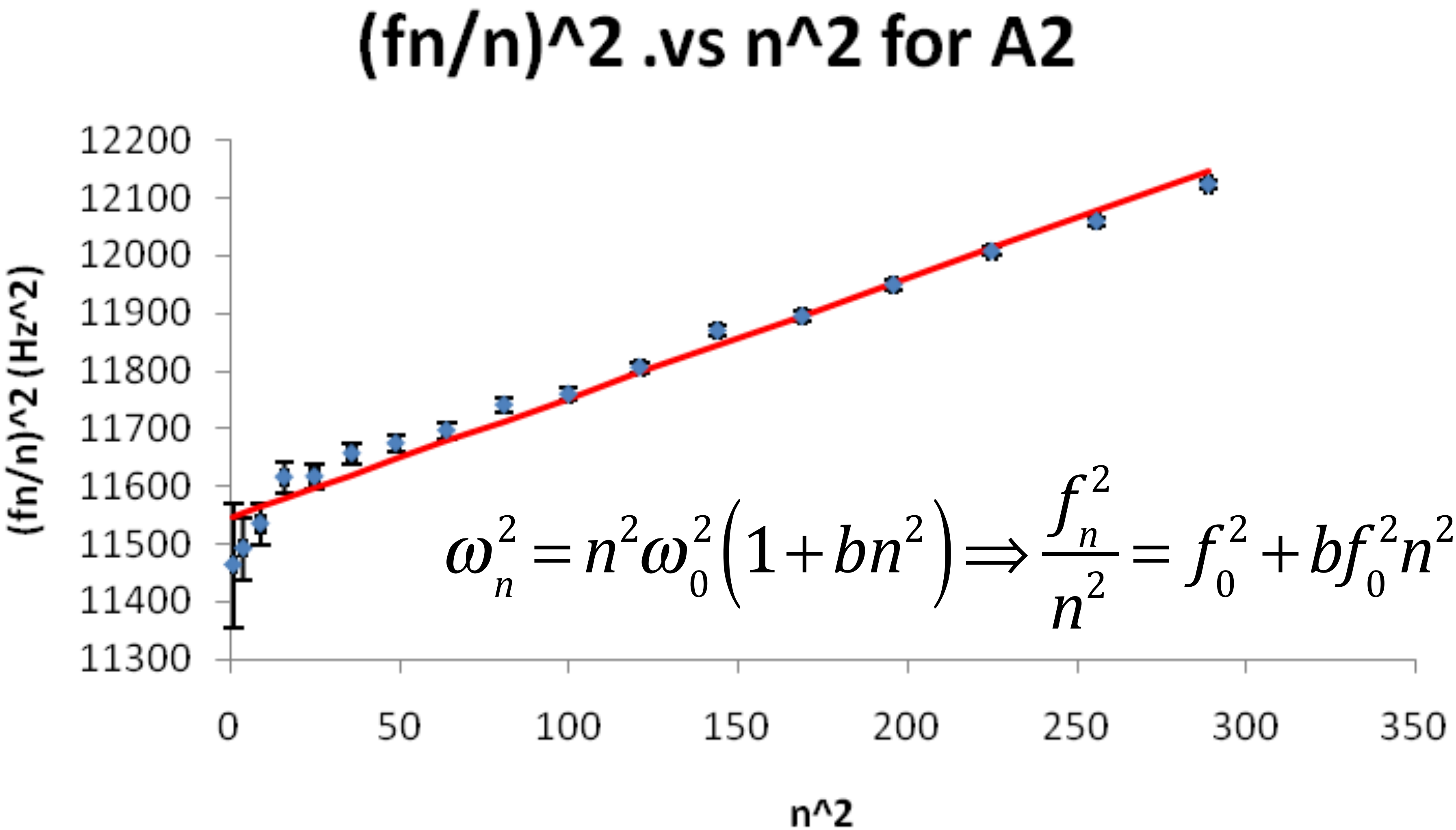


Piano moderne: cordes rigides



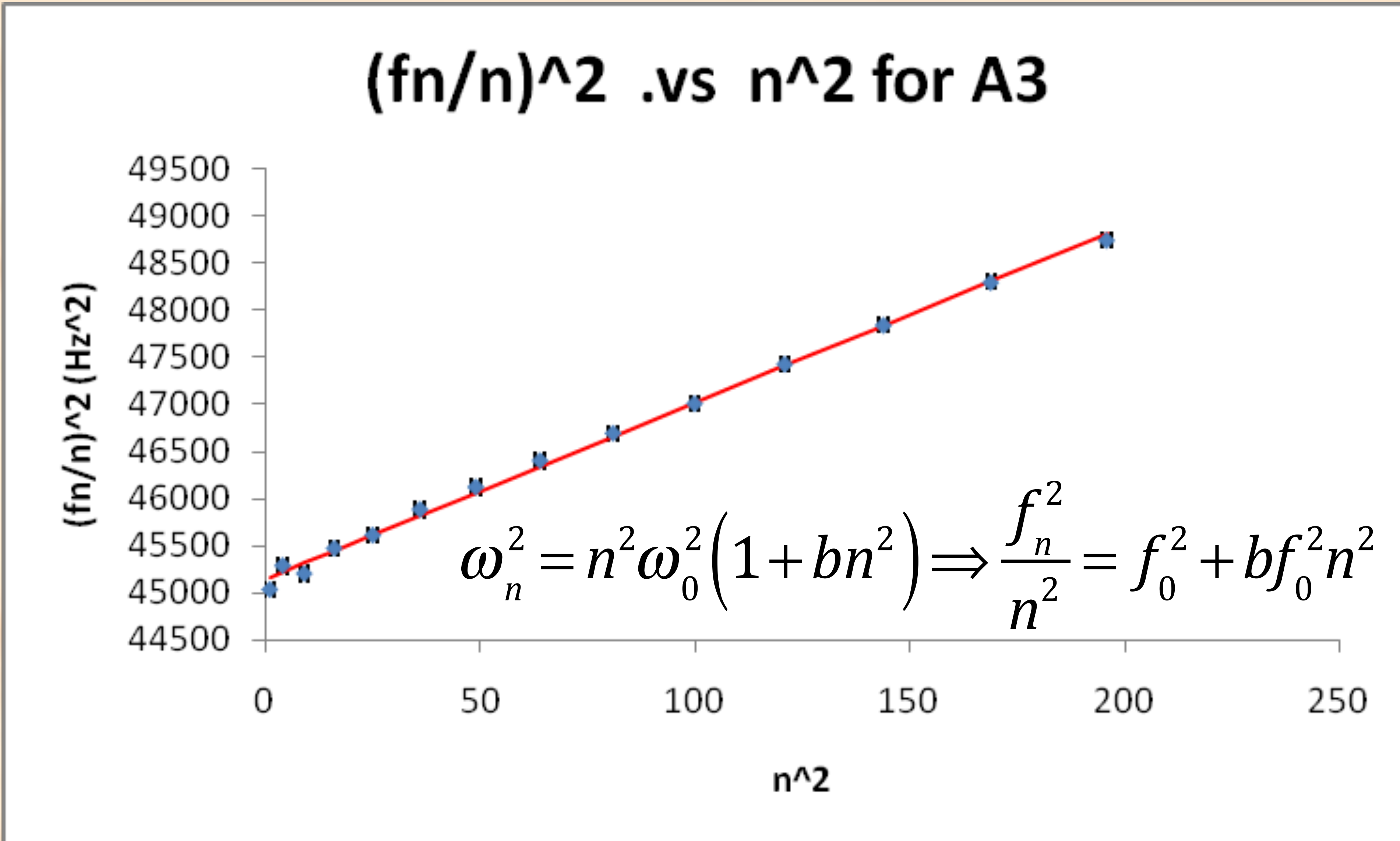
$$\omega_n^2 = n^2\omega_0^2\left(1+bn^2\right) \Rightarrow \frac{f_n^2}{n^2} = f_0^2 + bf_0^2 n^2$$

Piano moderne: cordes rigides



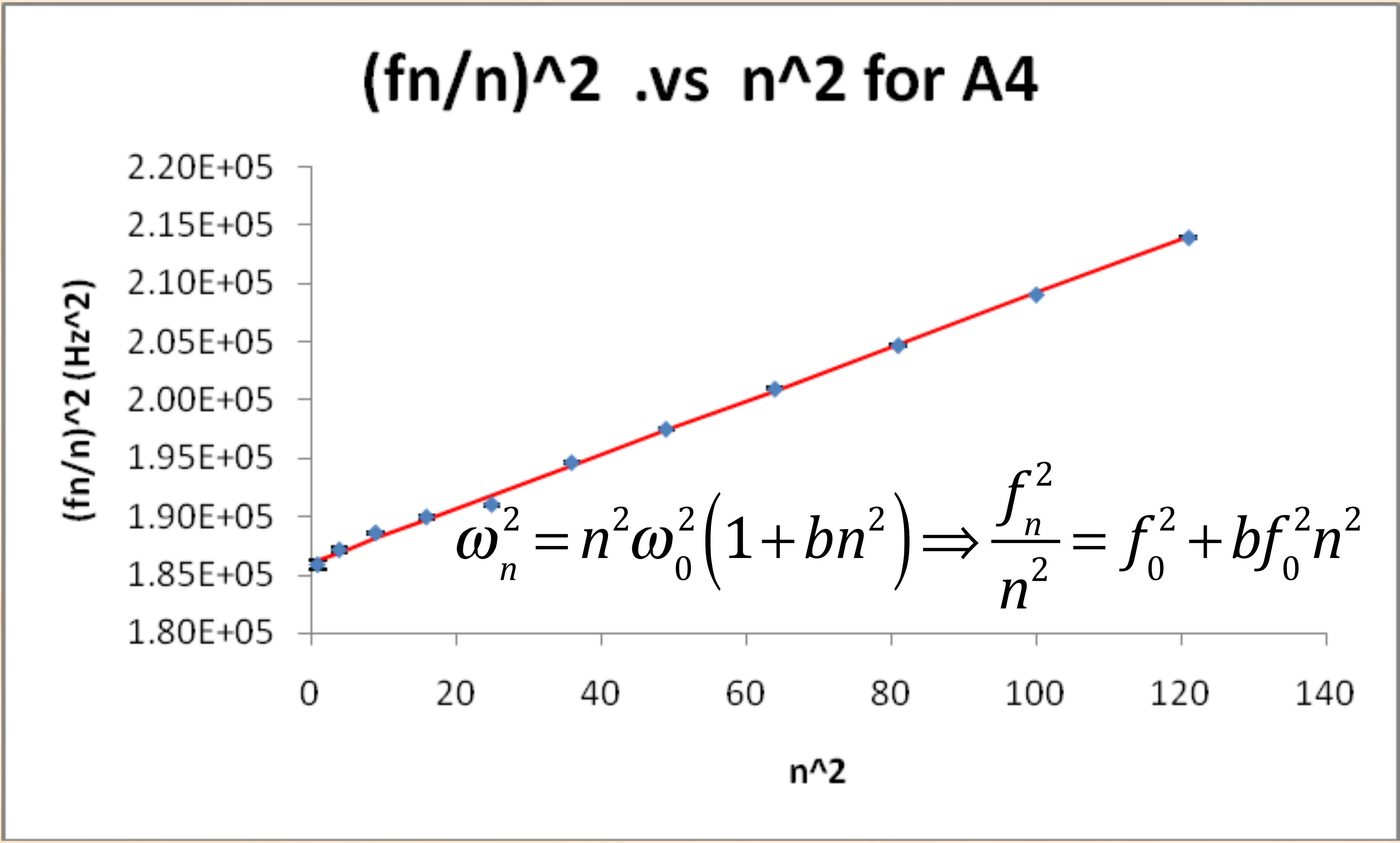
$$\omega_n^2 = n^2\omega_0^2\left(1+bn^2\right) \Rightarrow \frac{f_n^2}{n^2} = f_0^2 + bf_0^2 n^2$$

Piano moderne: cordes rigides



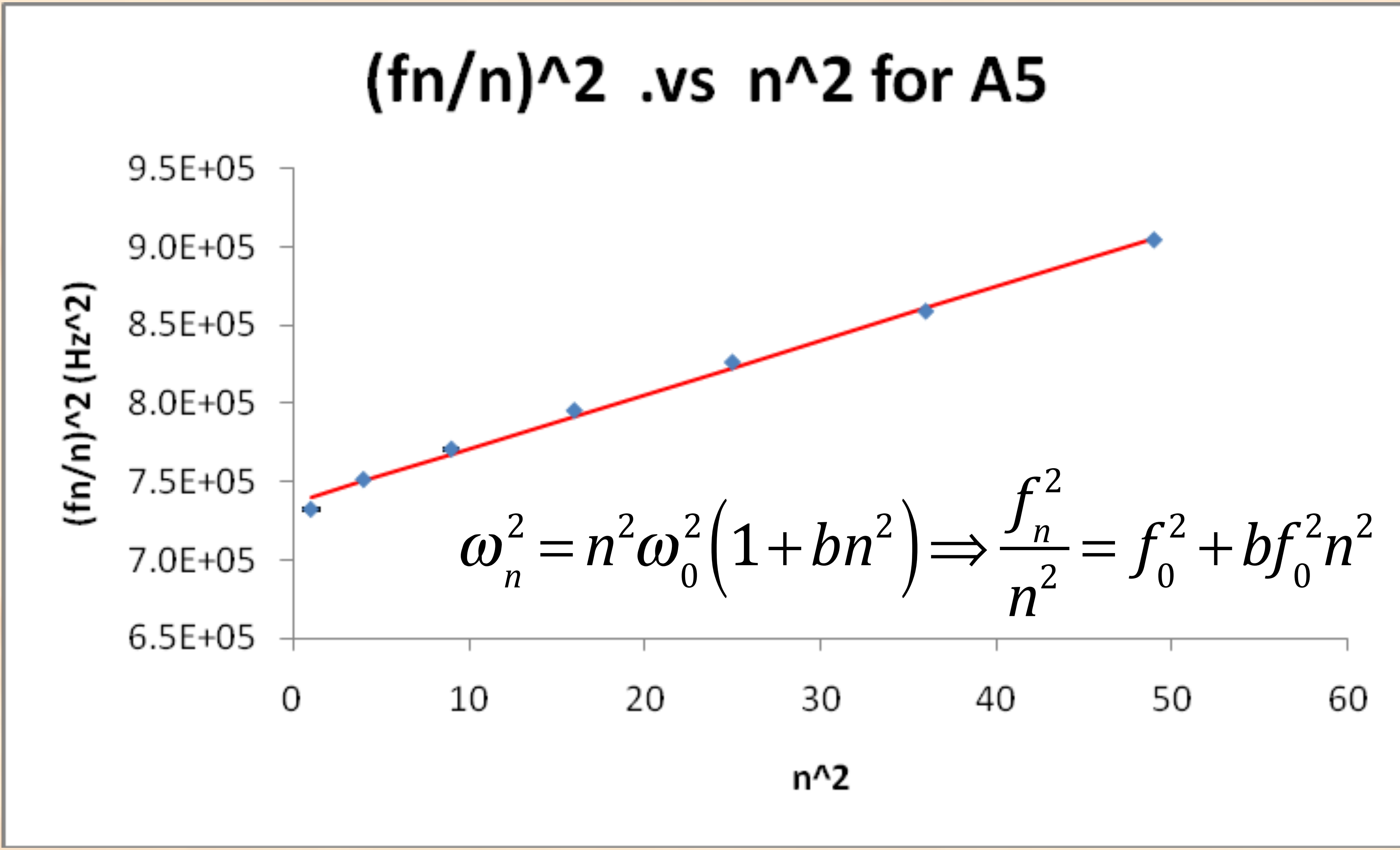
$$\omega_n^2 = n^2 \omega_0^2 \left(1 + b n^2\right) \Rightarrow \frac{f_n^2}{n^2} = f_0^2 + b f_0^2 n^2$$

Piano moderne: cordes rigides



$$\omega_n^2 = n^2\omega_0^2\left(1+bn^2\right) \Rightarrow \frac{f_n^2}{n^2} = f_0^2 + bf_0^2 n^2$$

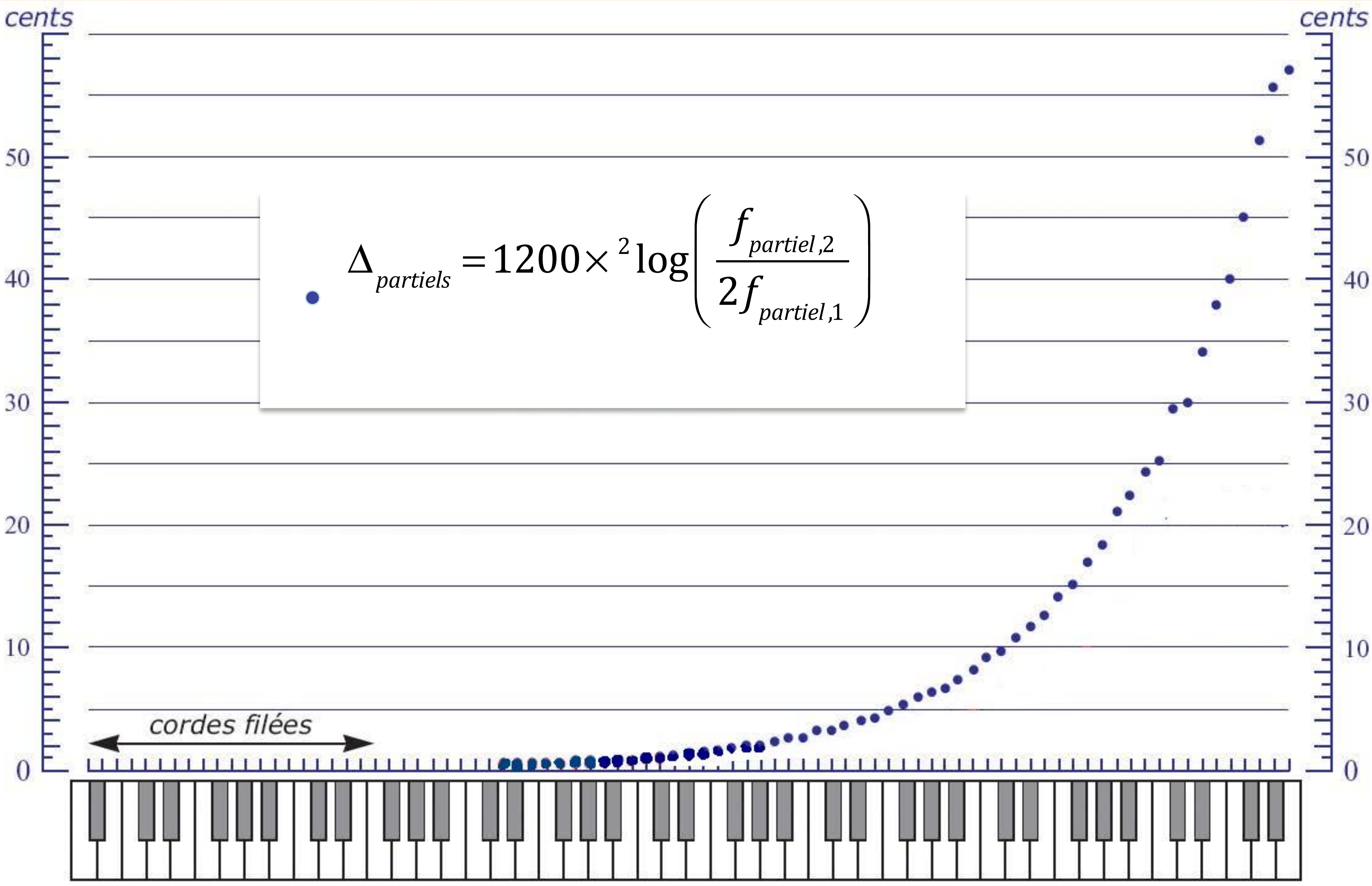
Piano moderne: cordes rigides



$$\omega_n^2 = n^2\omega_0^2\left(1+bn^2\right) \Rightarrow \frac{f_n^2}{n^2} = f_0^2 + bf_0^2 n^2$$

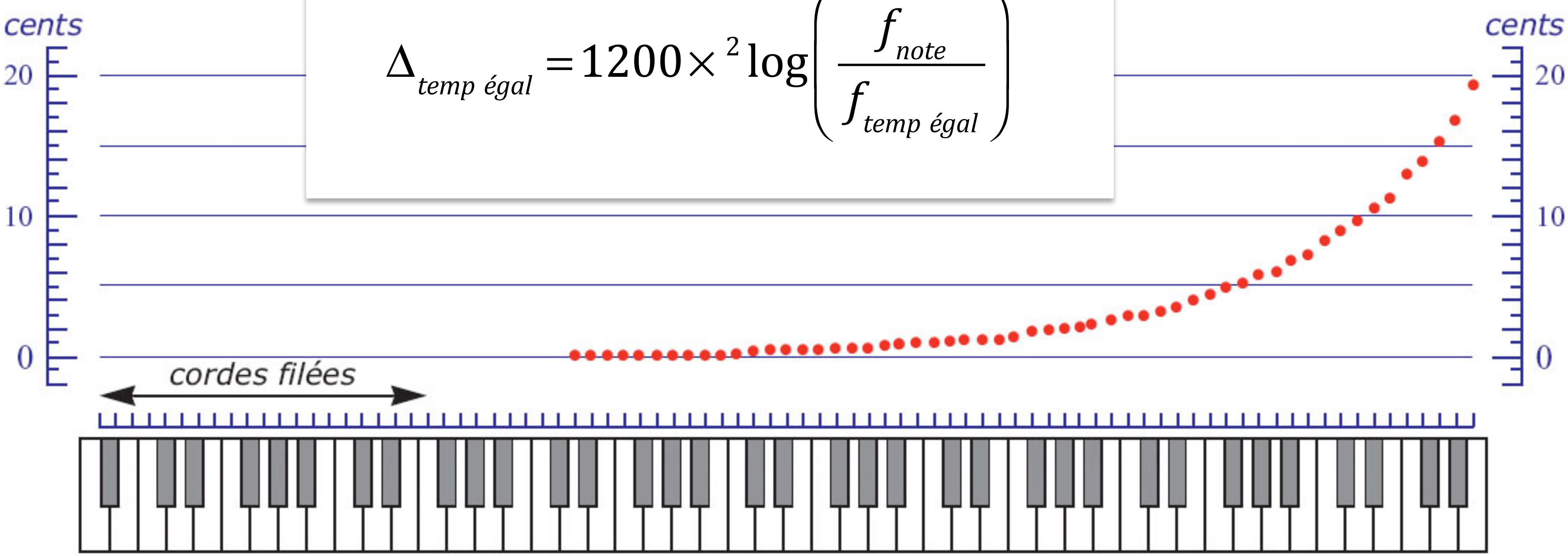
Piano moderne: cordes rigides

$$\Delta_{partiels} = 1200 \times {}^{2}\log\left(\frac{f_{partiel,2}}{2f_{partiel,1}}\right)$$



Effet de l'inharmonicité sur l'accord d'un piano moderne

$$\Delta_{temp\ égal} = 1200 \times {}^{2}\log\left(\frac{f_{note}}{f_{temp\ égal}}\right)$$



2.4 L'orgue

Hydraule.

Inventeur: Ctésibios d'Alexandrie (ingénieur, 284-221 AC).

Hydraule.

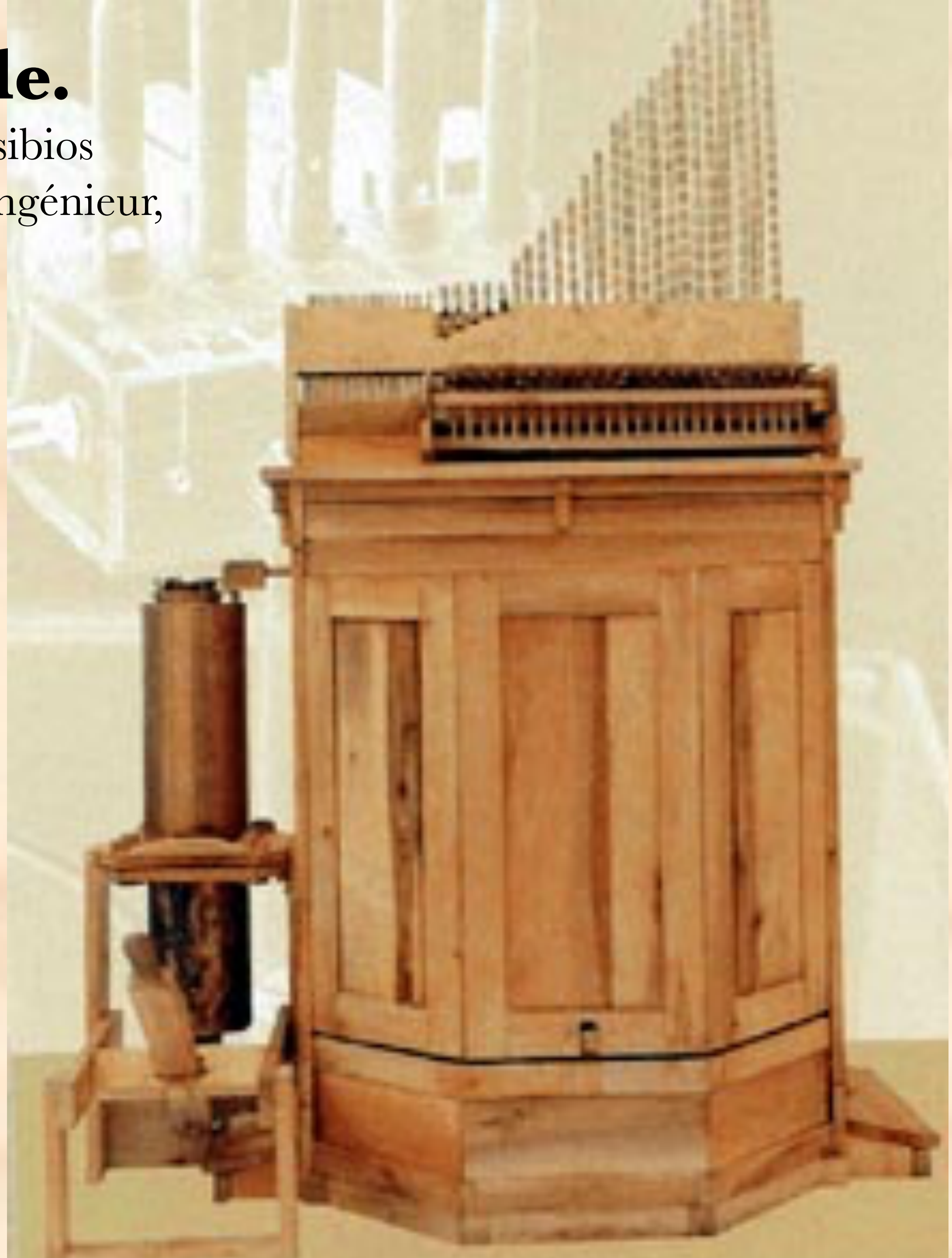
Inventeur: Ctésibios d'Alexandrie (ingénieur, 284-221 AC).

"Et qui magna levi detrudens murmura tactu
Innumeras voces segetis moderatus ahenæ,
Intonat erranti digito, penitusque trubali
Vecte laborantes, in carmina concitat undas."
De "consulatu Fl. Mallii Theodori panegyris »
(vers 320-322 EC)

«Qu'un autre enfant, par une légère pression,
des sons au loin retentissant,
modère les mille voix de mille tuyaux d'airain,
les fasse tonner sous ses doigts errants,
et d'une onde profondément agitée par le jeu du levier,
tire d'harmonieuses modulations. »

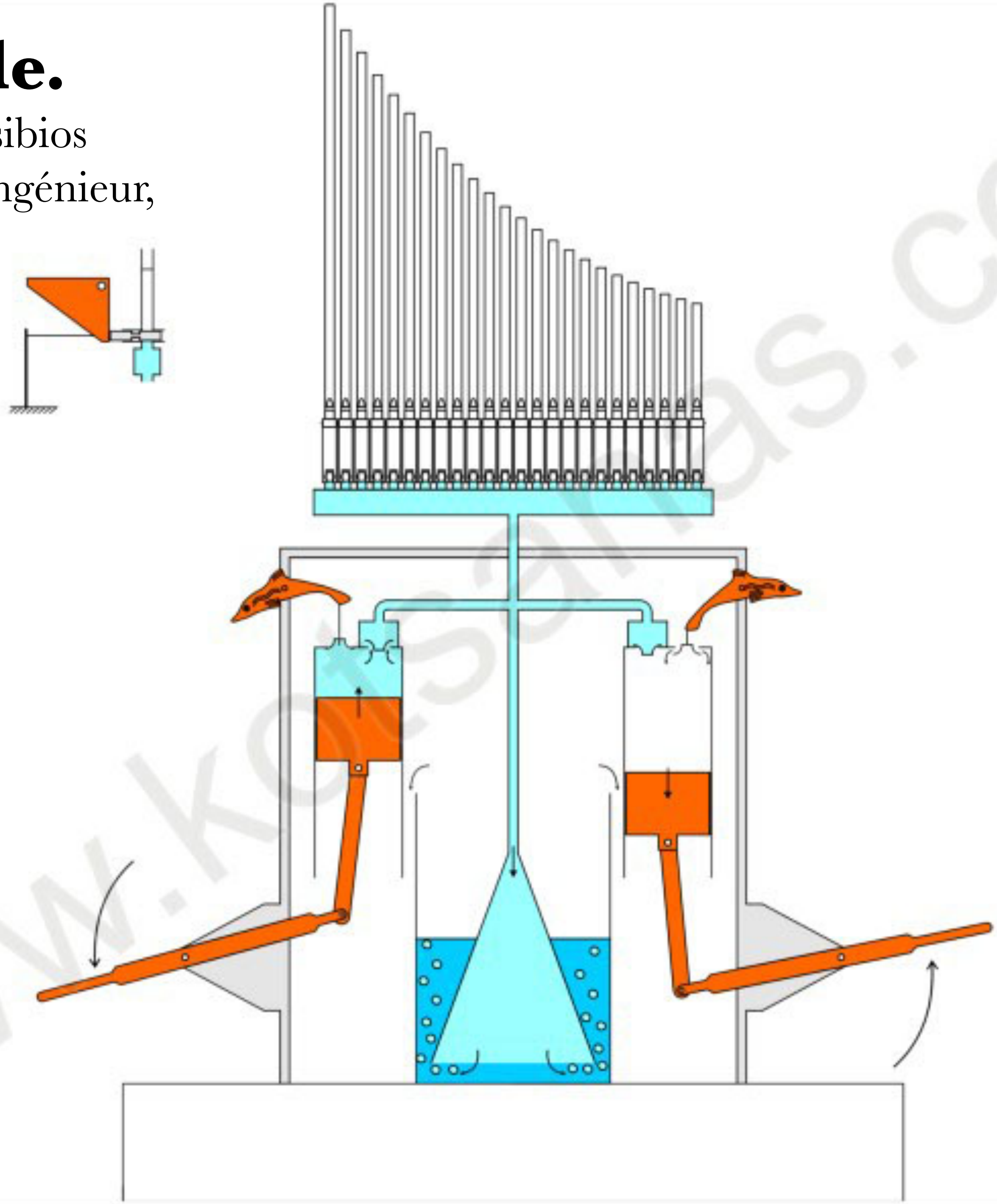
Hydraule.

Inventeur: Ctésibios d'Alexandrie (ingénieur, 284-221 AC).



Hydraule.

Inventeur: Ctésibios d'Alexandrie (ingénieur, 284-221 AC).



Hydraule.

Inventeur: Ctésibios d'Alexandrie (ingénieur, 284-221 AC).

3.1 La notation musicale

Système de symboles plus ou moins contraignants qui définissent :

-la durée

-la hauteur

-les nuances

du son.

Notation dans l’Antiquité

- Date précise: pas connue
- 1400 av JC: 36 chants hourrites sur des tablettes d'argile
- 408 av JC: Oreste; 405 av JC Iphigénie à Aulis d'Euripide
- 400 av JC, Asie: formes de notations musicales pour indiquer des thèmes et des modes
- 500 av JC jusqu’au présent, en Inde: les svara, notation syllabique analogue au solfège

Chant Hourrite
1300 av JC

Notation médiévale

800 AD – présent. Tropes, טראָפּ, répertoire de motifs musicaux traditionnels et stéréotypés

Texte massorétique de la Torah

hérité de la Massorah Tibérian, 100 AC

Genèse 1:9 בְּרֵאשִׁית

En Bleu: Signes de Cantillation

וַיֹּ֣אמֶר אֱלֹהִ֗ים יִקָּו֨וּ הַמַּ֜יִם

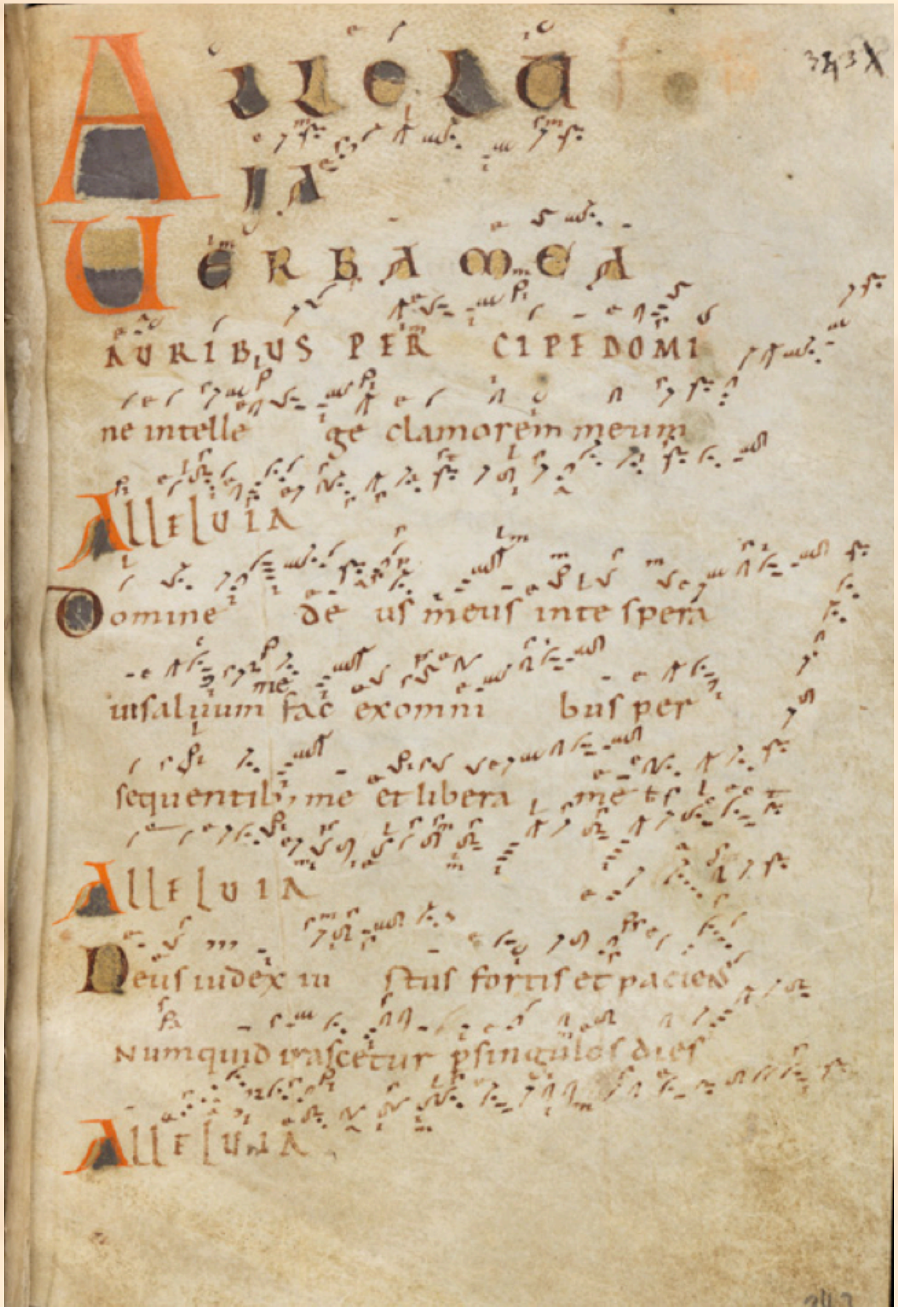
Et disent les seigneurs: que se rassemblent les eaux...

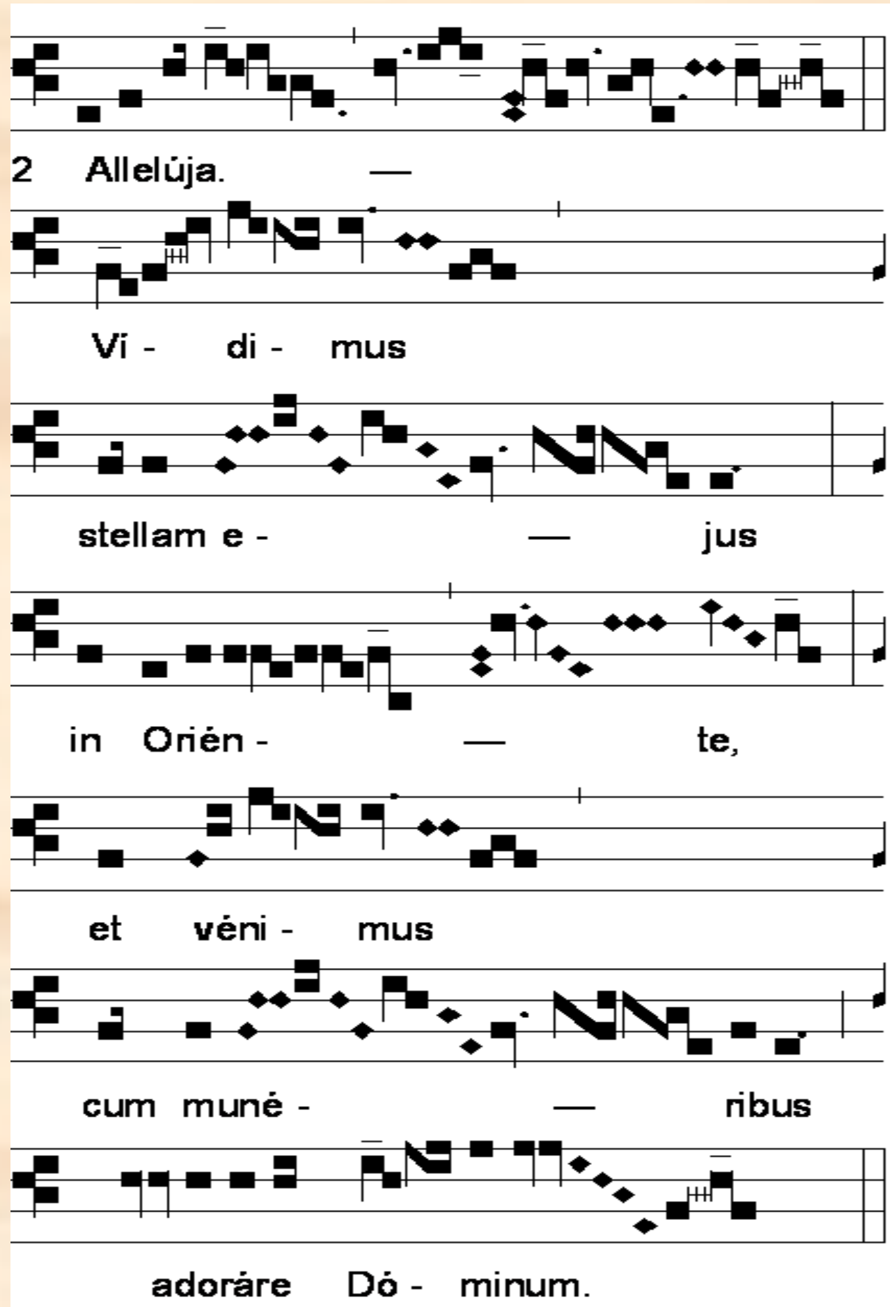
Notation médiévale

800 – 1500 : « neumes »

950, Guido d'Arezzo: portées à quatre lignes, chant grégorien.

Manuscrit d'Einsiedeln 121 (~968): Alleluia





950, Guido d'Arezzo: ut ré mi fa sol la

Hymne à saint Jean-Baptiste (Paul Diacre, 9e siècle)

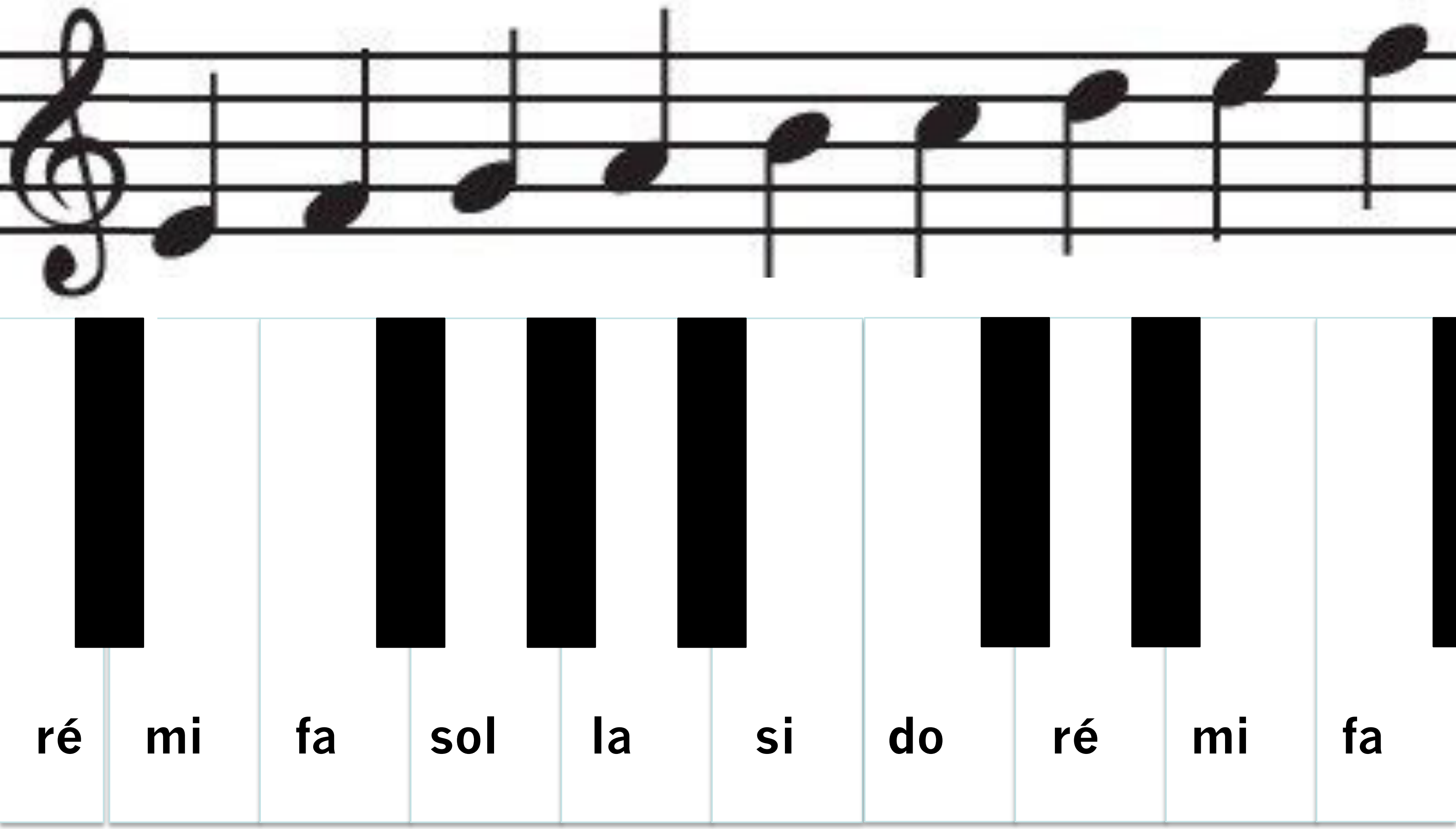
UT *queant laxis*	*Que puissent léger*
RE*sonare fibris*	***Ré****sonner nos cordes vocales*
MI*ra gestorum*	*des* ***Mi****racles de tes actes*
FA*muli tuorum*	*Nous sommes vos serviteurs.*
SOL*ve polluti*	*Otes les péchés*
LA*bii reatum*	*de nos* ***Lè****vres tachées*
S*ancte*	***S****aint*
I*ohannes.*	***J****ean*

Pour que tes serviteurs, pécheurs, puissent célébrer d'un cœur léger les merveilles de tes actes, absous-les, saint Jean.

DO *(=* ***UT****) attesté chez Pierre l'Arétin en 1536*

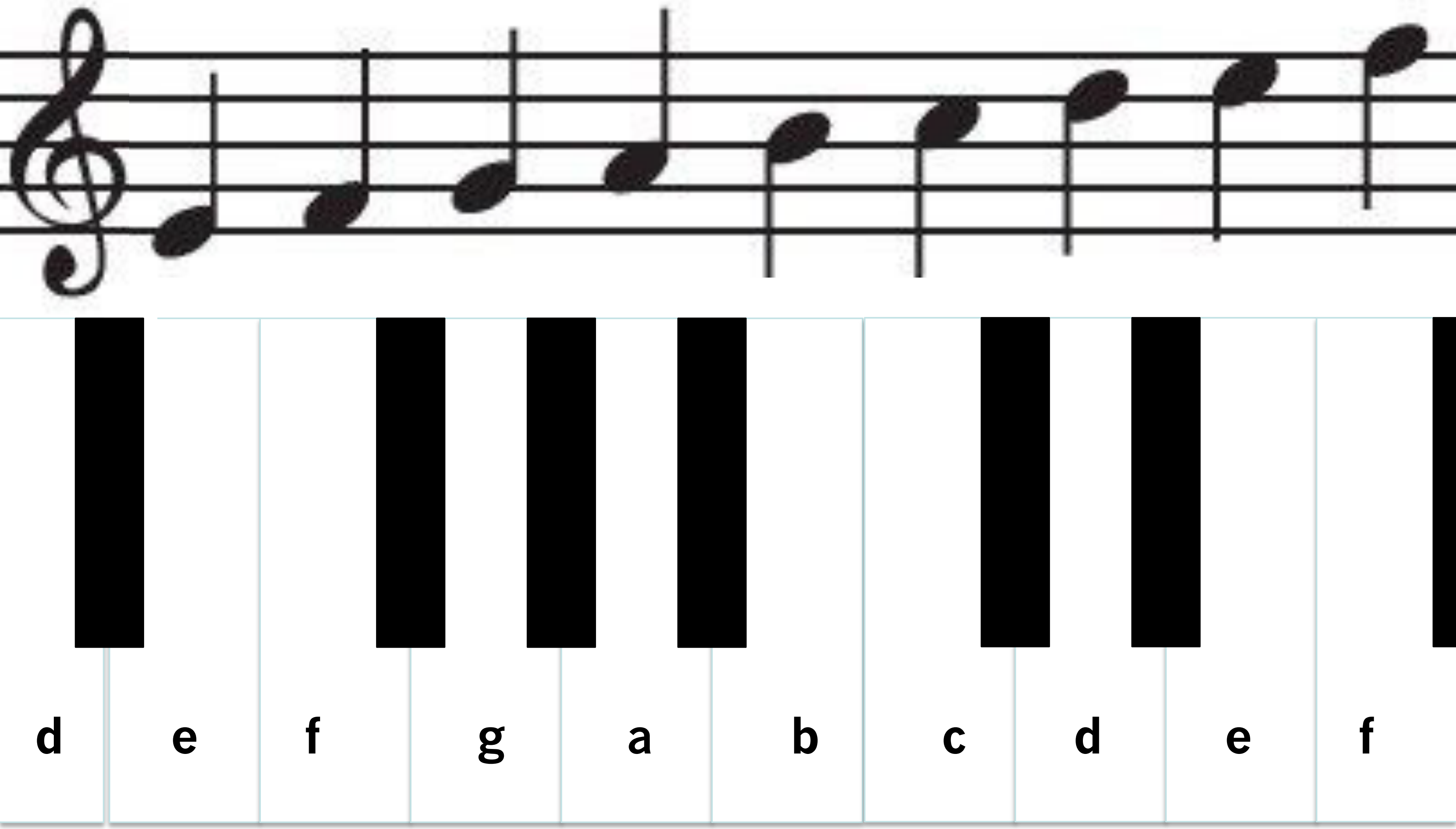
Notation contemporaine

1500 - jusqu'au présent: généralisation de la portée moderne à cinq lignes.



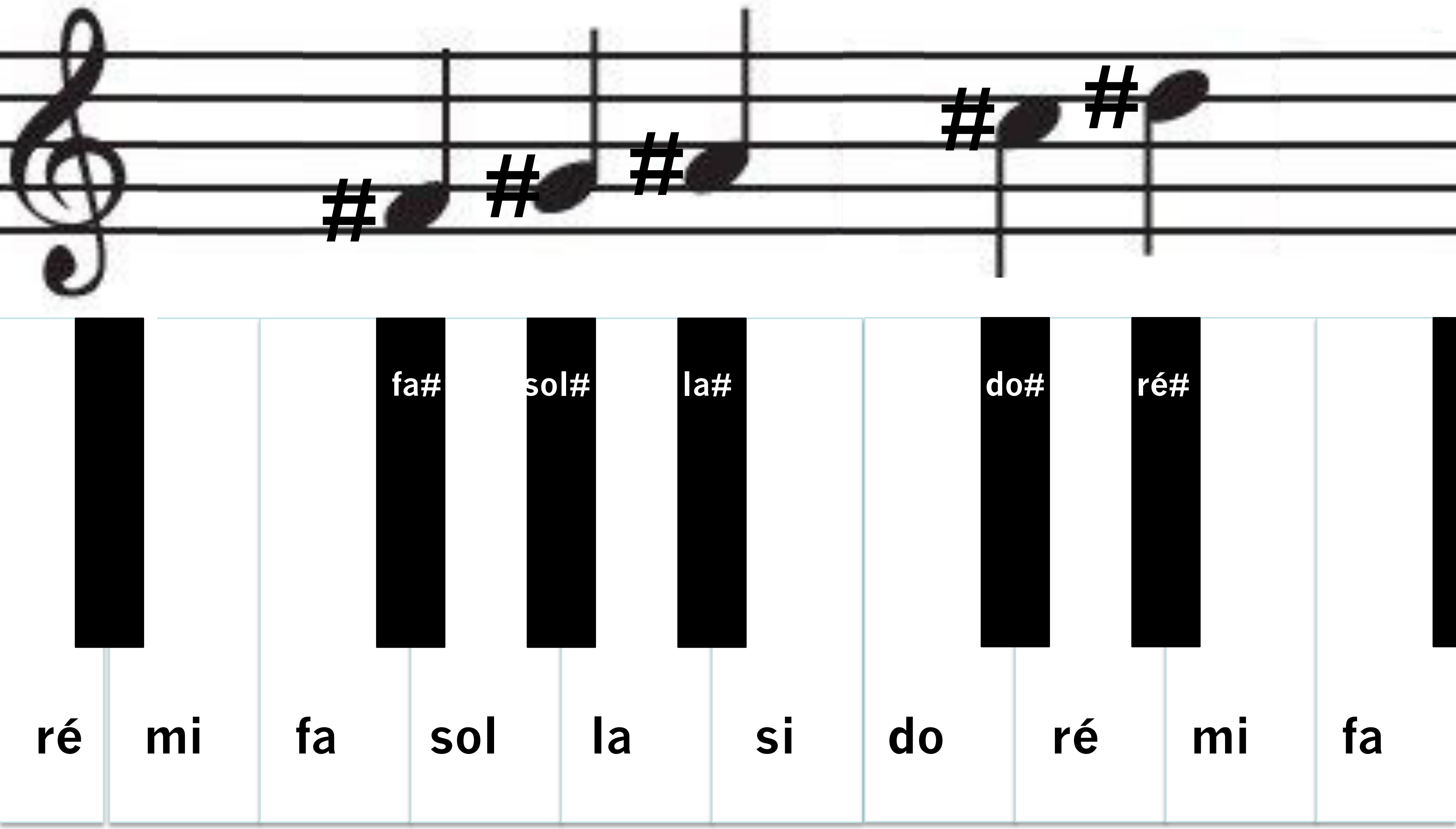
Notation contemporaine

1500 - jusqu'au présent: généralisation de la portée moderne à cinq lignes.



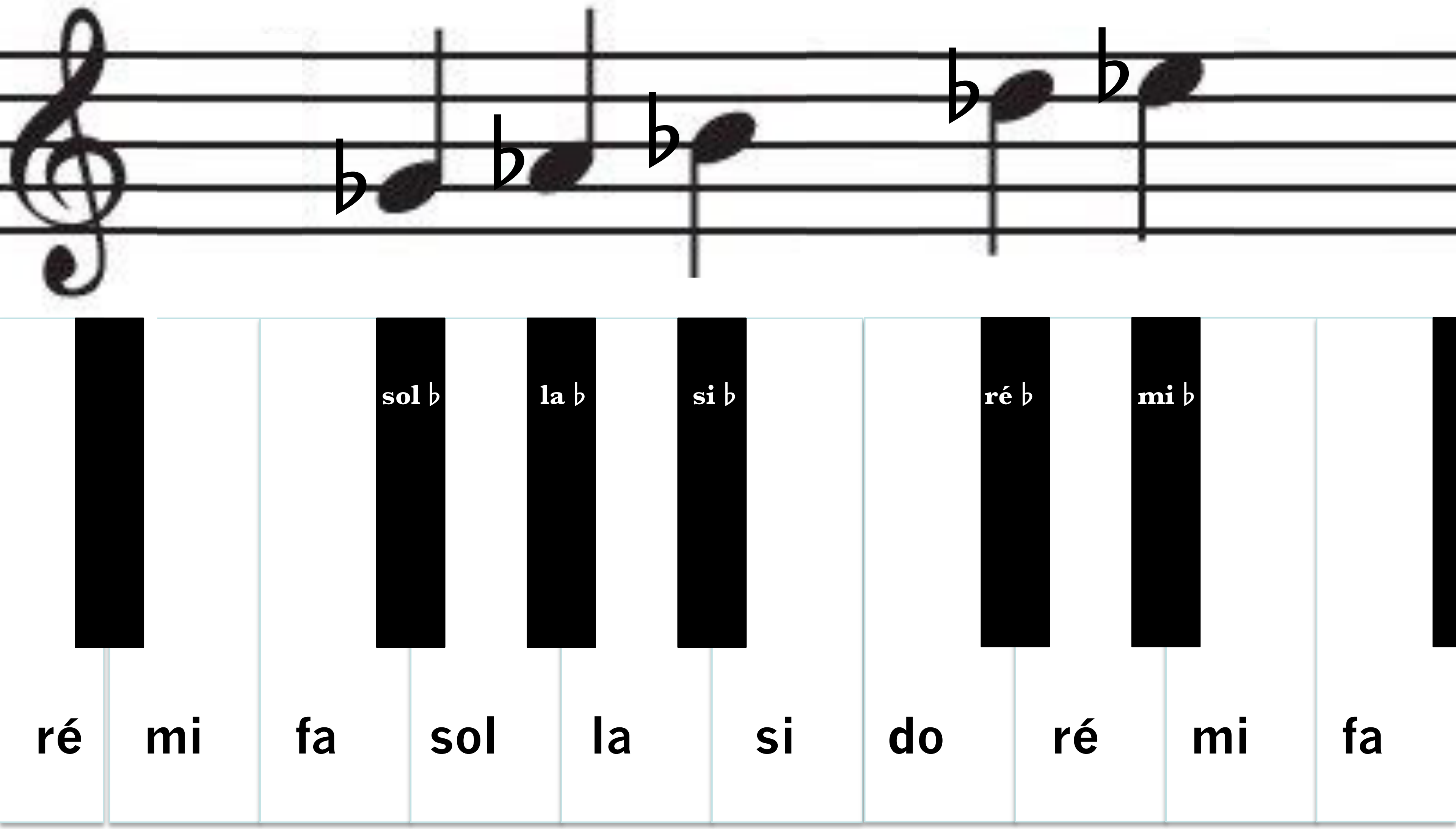
Notation contemporaine

1500 - jusqu'au présent: généralisation de la portée moderne à cinq lignes.



Notation contemporaine

1500 - jusqu'au présent: généralisation de la portée moderne à cinq lignes.



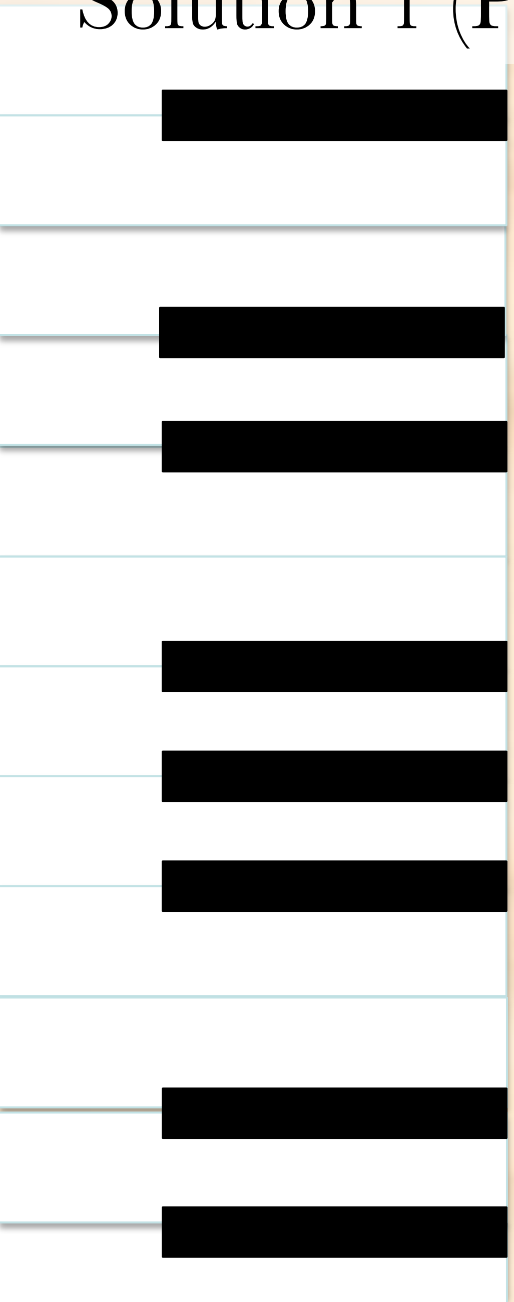
3.2 Evolution du système tonal

Antiquité et moyen âge:
Pythagore (600 av JC) : premières expériences et théories des intervalles
Platon (400 av JC) : Intervalles de 1, 4/3, 9/8, 3/2 et 2, leimma (demi-ton) de 256/243
Aristoxène (350 av JC) : Au lieu de ratios discrets, des variables continues
Euclide (300 av JC) : «La division du canon»
Didyme (50 AD) : Comma syntonique
Ptolémée (120 AD) : Un vingtaine de tempéraments diatoniques

Depuis la renaissance:
Pietro Aaron (1480 AD) : tempérament mésotonique à 1/4 de comma synthonique
Nicola Vicentino (1511 AD) : subdivision en 31 tons
Francisco de Salinas (1513 AD): subdivision en 19 tons
Gioseffo Zarlino (1517 AD) : subdivision en 19 tons
Marin Mersenne (1588 AD): subdivision en 31 tons
Christiaan Huygens (1629 AD) : subdivision en 31 tons
Andreas Werkmeister (1645 AD) : 8 tempéraments inégaux
Francesco Antonio Vallotti (1697 AD) : tempérament inégal
Leonhard Euler (1707 AD) : subdivision en 24 tons
Jean-Jacques Rousseau (1712 AD): Monochorde de Rouseeau
Thomas Young (1773 AD) : 2 tempéraments inégaux
Hermann von Helmholtz (1821 AD) : subdivision en 24 tons
Adriaan Fokker (1887 AD) : clavier à 31 intervalles égaux bien tempéré

Depuis le début de la 20ième siècle: tempérament égal, 12 tons

Comment subdiviser l'octave en 12 ?
Solution 1 (Ptolémée, 120): Le syntonon diatonique



Note	**f/f_0**	**$1200 \log_2(f/f_0)$**
do	**1**	**0**
do#	*16/15*	*112*
ré	**9/8**	**204**
mi ♭	*6/5*	*316*
mi	**5/4**	**386**
fa	**4/3**	**498**
fa#	*17/12*	*603*
sol	**3/2**	**702**
sol#	*8/5*	*814*
la	**5/3**	**884**
si ♭	*16/9*	*996*
si	**15/8**	**1088**
do	**2**	**1200**

Comment subdiviser l'octave en 12 ?
Solution 1 (Ptolémée, 120): Le syntonon diatonique

Note	f/f_0	
do	1	
sol	3/2	sol /do = 3/2
ré	9/8	ré /sol = 3/2
la	5/3	la /ré = 40/27 = 1.481..
mi	5/4	mi /la = 3/2
si	15/8	si /mi = 3/2
fa#	17/12	fa# /si = 68/45 = 1.511...
do#	16/15	do# / fa# = 384/255 = 1.506...
sol#	8/5	sol# / do# = 3/2
mi ♭	6/5	mi ♭ / sol# = 3/2
si ♭	16/9	si ♭ / mi ♭ = 40/27 = 1.481...
fa	4/3	fa / si ♭ = 3/2
2do	2	do / fa = 3/2

Problème : 4 quintes sont fausses

Comment subdiviser l'octave en 12 ?

Problème du syntonon diatonique : 1/3 des quintes sont fausses

Solution 2: L'accord Pythagoricien (Babylon 4000 av JC; Platon, dans « Timée », 360 av JC; Henri Arnault de Zwolle, 1450)

Note	f/f_0	
do	1	sol / do = 3/2
sol	$3/2$	ré / sol = 3/2
ré	$3^2/2^3$	la / ré = 3/2
la	$3^3/2^4$	mi / la = 3/2
mi	$3^4/2^6$	si / mi = 3/2
si	$3^5/2^7$	fa# / si = 3/2
fa#	$3^6/2^9$	do# / fa# = 3/2
do#	$3^7/2^{11}$	sol# / do# = 3/2
sol#	$3^8/2^{12}$	mi ♭ / sol# = 3/2
mi ♭	$3^9/2^{14}$	si ♭ / mi ♭ = 3/2
si ♭	$3^{10}/2^{15}$	fa / si ♭ = 3/2
fa	$3^{11}/2^{17}$	do / fa = $2^{18}/3^{11} = 1.4798 < 3/2$

3.3 Moyen age: Gammes pythagoricienne, gammes « justes »

Chant Grégorien: Polyphonie basé sur des quintes ***justes***. *Les tierces n'étaient pas utilisées!*

Psaulm 2 v. 7, 1:
Invitatorium: Deum Verum
Etienne de Liege
Chœur: Psallentes
www.psallentes.be

Dominus dixit ad me :
Filius meus es tu;
ego hodie genui te.

Le Seigneur m'a dit :
Tu es mon Fils ;
moi aujourd'hui je t'ai engendré.

Quare fremuerunt gentes
et populi meditati sunt inania.

Pourquoi les nations ont-elles frémi,
et les peuples ont-ils médité de vains projets ?

Astiterunt reges terrae
et principes convenerunt in unum,
adversus Dominum et adversus Christum eius.

Les rois de la terre se sont dressés et les princes
se sont ligués en bloc contre le Seigneur,
et contre son Christ.

Postula a me,
et tibi dabo gentes hereditatem tuam,
et possesionem tuam terminos terrae.

Demande-moi,
et je te donnerai les nations pour héritage,
et pour domaine les confins de la terre.

Comment subdiviser l'octave en 12 ?

Problèmes de l'accord Pythagoricien: Les tierces son fausses

Solution 2: L'accord Pythagoricien (Babylon 4000 av JC; Platon, dans « Timée », 360 av JC; Henri Arnault de Zwolle, 1450)

Note	f/f_0
do	1
sol	$3/2$
ré	$3^2/2^3$
la	$3^3/2^4$
mi	$3^4/2^6$
si	$3^5/2^7$
fa#	$3^6/2^9$
do#	$3^7/2^{11}$
sol#	$3^8/2^{12}$
mi ♭	$3^9/2^{14}$
si ♭	$3^{10}/2^{15}$
fa	$3^{11}/2^{17}$

mi / do = $3^4/2^6$
si / sol = $3^4/2^6$
fa# / ré = $3^4/2^6$
do# / la = $3^4/2^6$
sol# / mi = $3^4/2^6$
mi ♭ / si = $3^4/2^6$
si ♭ / fa# = $3^4/2^6$
fa / do# = $3^4/2^6$

$= 1.266 > 5/4$

do / sol# = $2^{13}/3^8$
sol/ mi ♭ = $2^{13}/3^8$
ré / si ♭ = $2^{13}/3^8$
la / fa = $2^{13}/3^8$

$= 1.249 < 5/4$

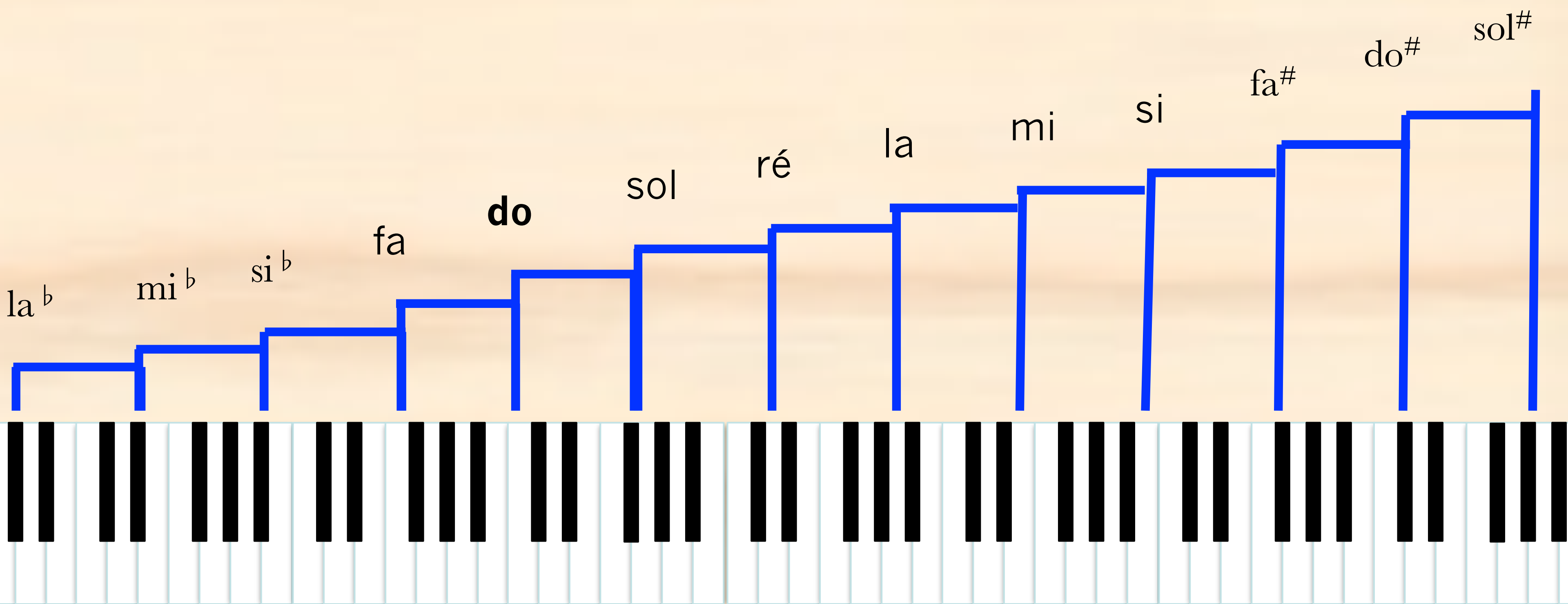
3.4 Le comma pythagoricien: $[3/2]^{12} \neq 2^7$

Cercle de quintes: *la♭-mi♭-si♭-fa-* **do***-sol-ré-la-mi-si-fa#-do#-sol#*

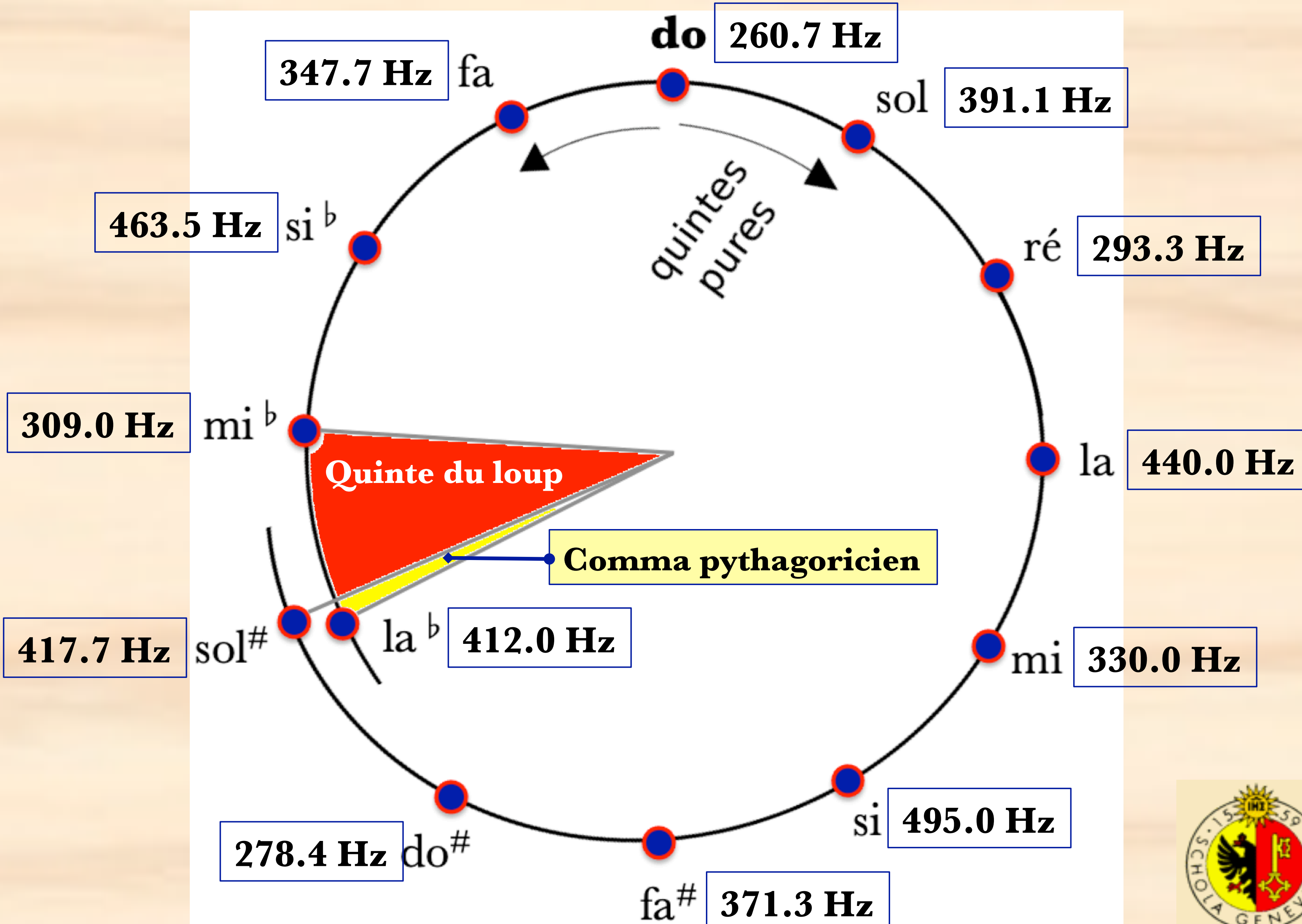
12 quintes: $1200 \times \log_2([3/2]^{12}) = 8424$ cents

7 octaves: $1200 \times \log_2(2^7) = 8400$ cents

Comma pythagoricien (Euclide, 300 avant JC): $8424 - 8400 = 24$ cents



Le comma pythagoricien: $[3/2]^{12} \neq 2^7$

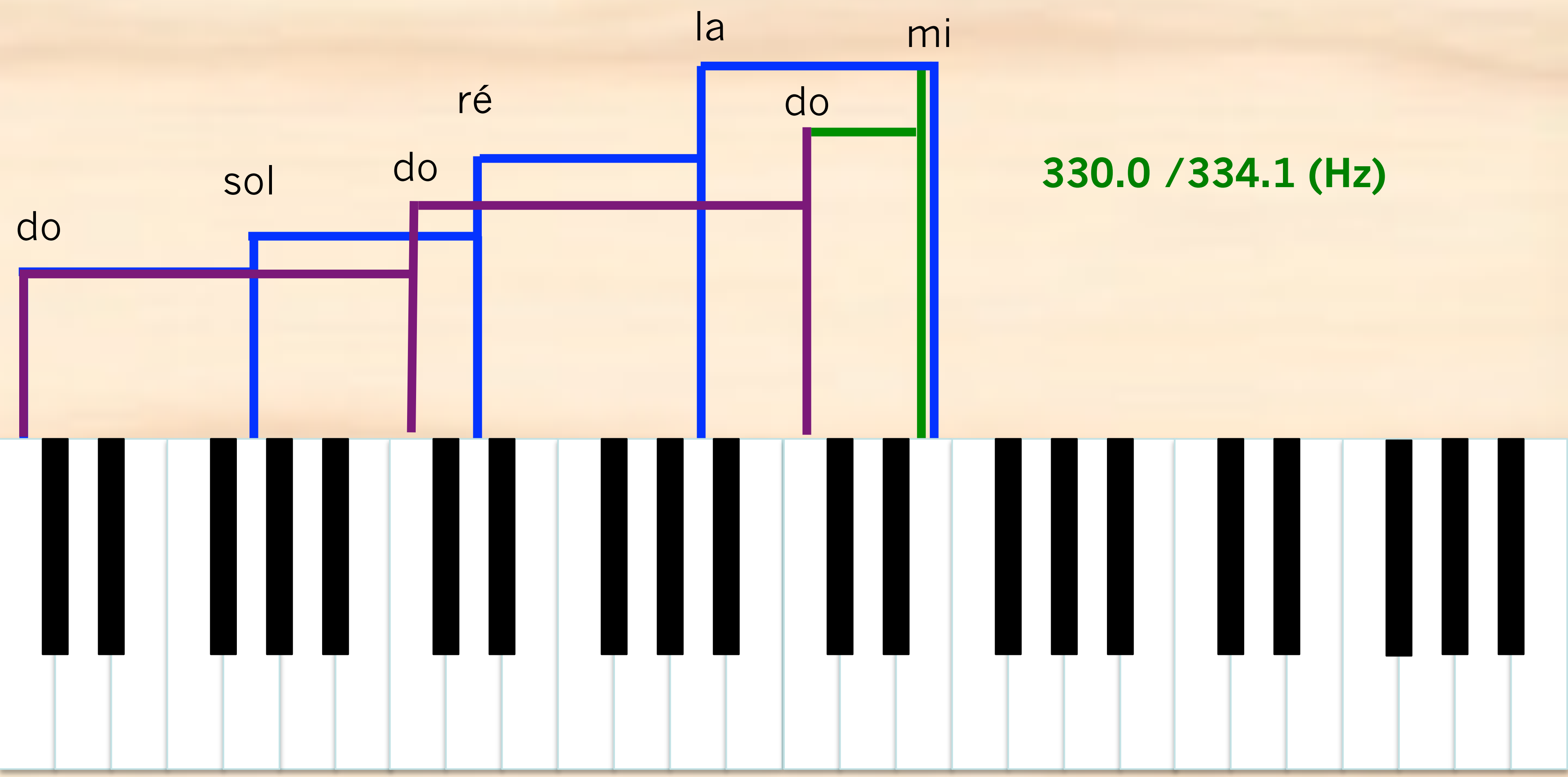


Le comma synthonique: $[3/2]^4 \neq 2 \times 2 \times 5/4$

4 quintes $= 1200 \times \{\log_2([3/2]^4) \; = 2808$ cents

2 octaves + 1 tierce: $1200 \times \log_2(2 \times 2 \times 5/4) = 2786$ cents

Comma synthonique (Didyme, AD 50): $2786 - 2808 = 22$ cents



3.5 Renaissance: Tempéraments mésotoniques

Réduire les quintes pour que les tierces soient plus justes

(Pietro Aaron, « Il Toscanello della Musica », 1523)

Notation:

q_{juste} = quinte juste = $1200 \times \log_2(3/2) = 702$ cts

c_P = comma pythagoracien = $1200 \times \log_2(3^{12}/2^{19}) = 23.5$ cts

c_s = comma synthonique = $1200 \times \log_2(81/80) = 21.5$ cts

Tempérament mésotonique à 1/n de comma syntonique:

$$q_n = q_{juste} - 1/n \;\; c_s$$

Tempérament mésotonique à 1/3 de comma syntonique

$$q_3 = q_{juste} - 1/3 \;\; c_s = 694.8 \text{ cents}$$

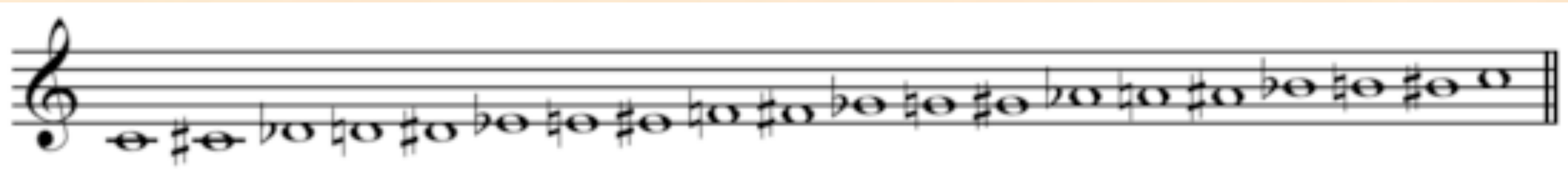
Note	#quintes	ratio	cents	ce$^{\mathbf{min}}$
do	0	1.00	0.0	0
do#	7	1.04	63.5	0
ré	2	1.12	189.6	0
mi♭	**-3**	1.20	315.6	63
mi	4	1.24	379.1	0
fa	-1	1.34	505.2	63
fa#	6	1.39	568.7	0
sol	1	1.49	694.8	0
sol#	**8**	1.55	758.3	0
la	3	1.67	884.4	0
si♭	-2	1.79	1010.4	63
si	5	1.86	1073.9	0

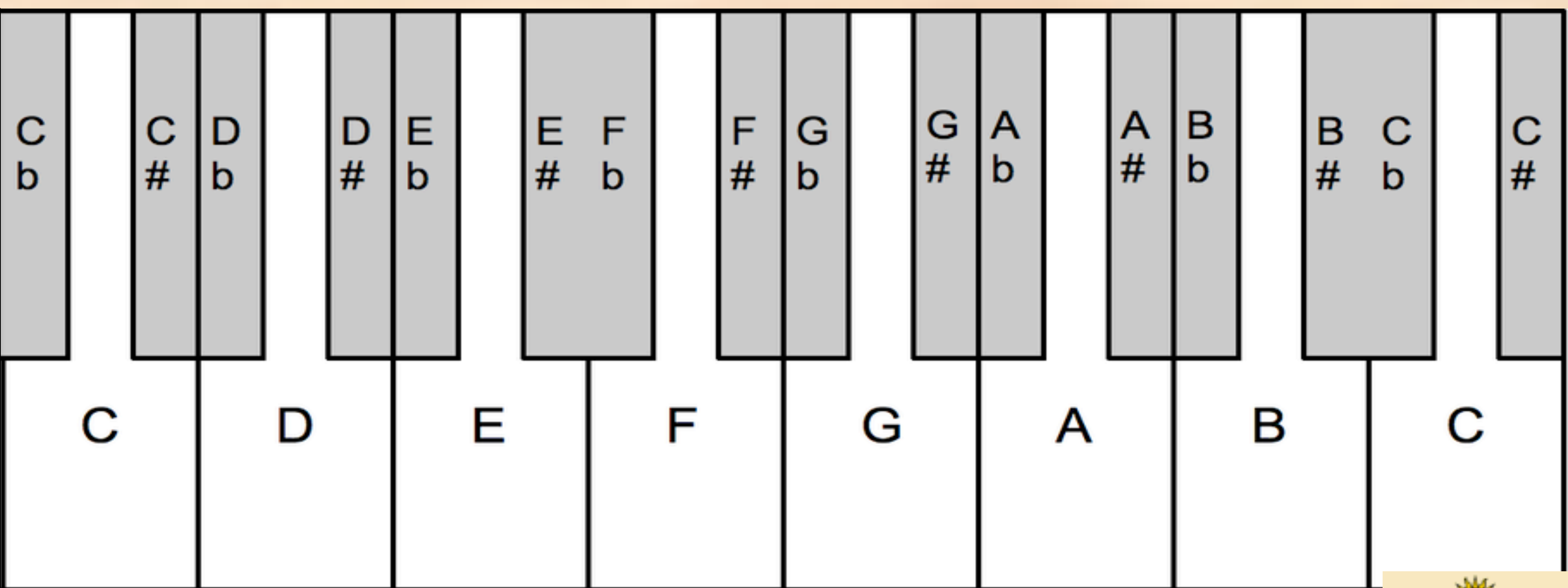
Fransisco de Salinas:
19 intervalles égales

ratio	cents
0/19	0.0
1/19	63.2
3/19	189.5
5/19	315.8
6/19	378.9
8/19	505.3
9/19	568.4
11/19	694.7
12/19	757.9
14/19	884.2
16/19	1010.5
17/19	1073.7

Fransisco de Salinas (16ième siècle):

Tempérament mésotonique à 1/3 c_s ≈ Tempérament égal de 19 intervalles





Composition en 19 intervalles égales:

Guillaume Costeley (1558): «Seigneur Dieu ta pitié »

Tempérament mésotonique à 1/4 de comma syntonique

$q_4 = q_{juste} - 1/4\ c_s = 696.6$ cents

Note	ratio	cents	quinte	tierce^{maj}	tierce^{min}
do	1.000	0.0	-5	0	-5
do#	1.045	76.1	-5	41	-5
ré	1.118	193.2	-5	0	-5
mi♭	1.196	310.3	-5	0	-46
mi	1.250	386.3	-5	0	-5
fa	1.337	503.4	-5	0	-46
fa#	1.398	579.5	-5	41	-5
sol	1.495	696.6	-5	0	-5
sol#	1.563	772.6	36	41	-5
la	1.672	889.7	-5	0	-5
si♭	1.789	1006.8	-5	0	-46
si	1.869	1082.9	-5	41	-5

Tempérament mésotonique à 1/4 de comma syntonique

Avantage:
- Pour 8 tonalités les tierces majeures sont justes

Desavantages:
- Quinte de loup entre le sol$^{\#}$ et le mi $^{\flat}$
- Pour 4 tonalités les tierces majeures sont fausses

3.6 De la Siècle des Lumières jusqu'au Romantisme : Tempéraments inégaux

Valotti, Werkmeister, Bach, Kirnberger, Young

Avantages:
- Tierces justes (presque ou complètement)
- Quintes presque justes
- Toute les modulations sont possibles
- Chaque tonalité a son propre « caractère » *

Desavantage:
- Ni les tierces ni les quintes sont justes

***Christian Schubart: Ideen zu einer Aesthetik der Tonkunst (1806)**

C major	Completely pure. Its character is: innocence, simplicity, naïvety, children's talk.
C minor	Declaration of love and at the same time the lament of unhappy love. All languishing, longing, sighing of the love-sick soul lies in this key.
Db major	A leering key, degenerating into grief and rapture. It cannot laugh, but it can smile; it cannot howl, but it can at least grimace its crying.--Consequently only unusual characters and feelings can be brought out in this key.
D major	The key of triumph, of Hallejuahs, of war-cries, of victory-rejoicing. Thus, the inviting symphonies, the marches, holiday songs and heaven-rejoicing choruses are set in this key.
D minor	Melancholy womanliness, the spleen and humours brood.
D# minor	Feelings of the anxiety of the soul's deepest distress, of brooding despair, of blackest depresssion, of the most gloomy condition of the soul. Every fear, every hesitation of the shuddering heart, breathes out of horrible D# minor. If ghosts could speak, their speech would approximate this key.
Eb major	The key of love, of devotion, of intimate conversation with God.
E major	Noisy shouts of joy, laughing pleasure and not yet complete, full delight lies in E Major.
F major	Complaisance & calm.
F minor	Deep depression, funereal lament, groans of misery and longing for the grave.
F# major	Triumph over difficulty, free sigh of relief utered when hurdles are surmounted; ADho of a soul which has fiercely struggled and finally conquered lies in all uses of this key.
F# minor	A gloomy key: it tugs at passion as a dog biting a dress. Resentment and discontent are its language.
G major	Everything rustic, idyllic and lyrical, every calm and satisfied passion, every tender gratitude for true friendship and faithful love,--in a word every gentle and peaceful emotion of the heart is correctly expressed by this key.
G minor	Discontent, uneasiness, worry about a failed scheme; bad-tempered gnashing of teeth; in a word: resentment and dislike.
Ab major	Key of the grave. Death, grave, putrefaction, judgment, eternity lie in its radius.
Ab minor	Grumbler, heart squeezed until it suffocates; wailing lament, difficult struggle; in a word, the color of this key is everything struggling with difficulty.
A major	This key includes declarations of innocent love, satisfaction with one's state of affairs; hope of seeing one's beloved again when parting; youthful cheerfulness and trust in God.
A minor	Pious womanliness and tenderness of character.
Bb major	Cheerful love, clear conscience, hope aspiration for a better world.
Bb minor	A quaint creature, often dressed in the garment of night. It is somewhat surly and very seldom takes on a pleasant countenance. Mocking God and the world; discontented with itself and with everything; preparation for suicide sounds in this key.
B major	Strongly coloured, announcing wild passions, composed from the most glaring coulors. Anger, rage, jealousy, fury, despair and every burden of the heart lies in its sphere.
B minor	This is as it were the key of patience, of calm awaiting ones's fate and of submission to divine dispensation.

3.7 A partir de la vingtième siècle: Tempérament égal

Tempérament mésotonique à 1/12 de comma Pythagoricien

$q_{égal} = q_j - c_P/12 = 700$ cents

Note	rel. freq.	cents	5te*2/3	3ce*5/4	3ce*6/5
do	1.00	0.0	-2	14	-16
do#	1.06	100.0	-2	14	-16
ré	1.12	200.0	-2	14	-16
mi♭	1.19	300.0	-2	14	-16
mi	1.26	400.0	-2	14	-16
fa	1.33	500.0	-2	14	-16
fa#	1.41	600.0	-2	14	-16
sol	1.50	700.0	-2	14	-16
sol#	1.59	800.0	-2	14	-16
la	1.68	900.0	-2	14	-16
si♭	1.78	1000.0	-2	14	-16
si	1.89	1100.0	-2	14	-16

Tempérament égal

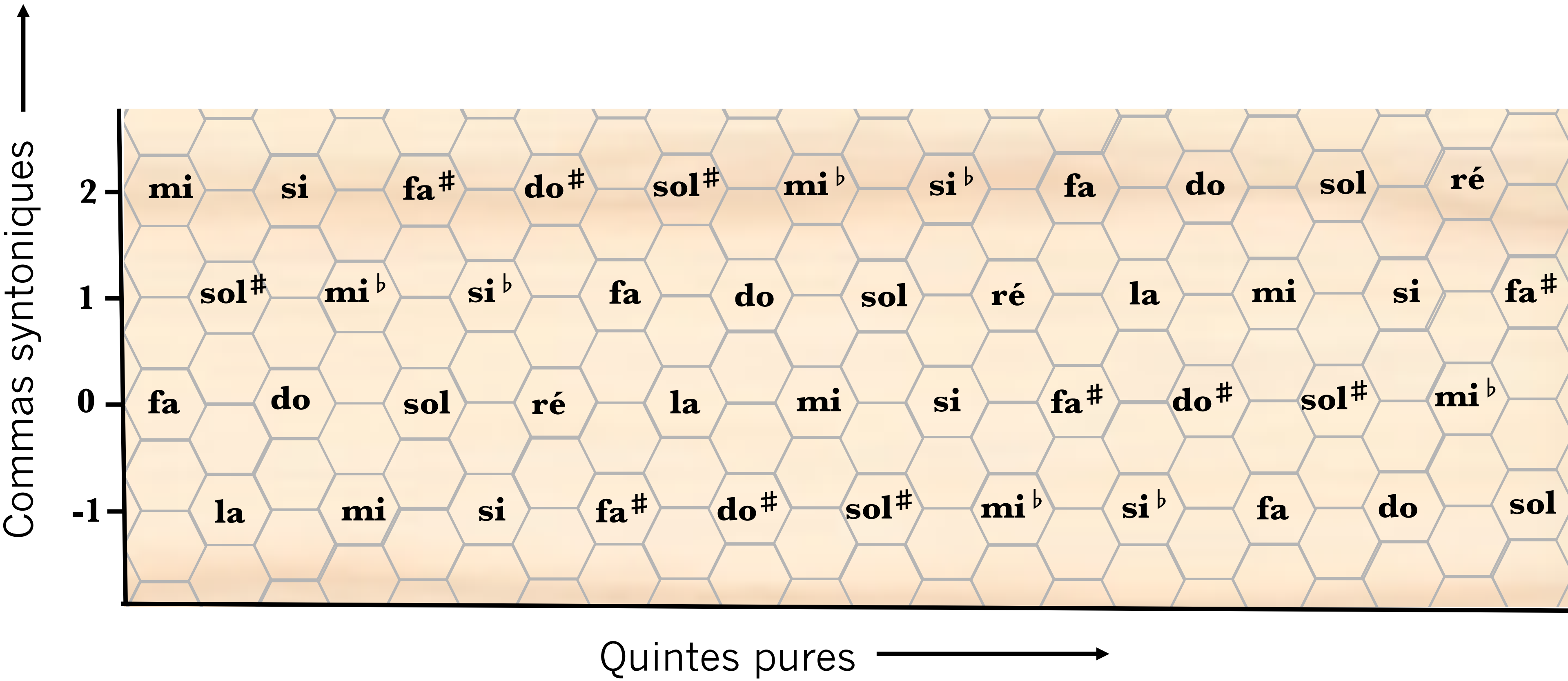
Avantages:
-Toutes les modulations sont possibles

Desavantage:
-Aucune tierce est juste
-Perte totale des « caractères » des tonalités

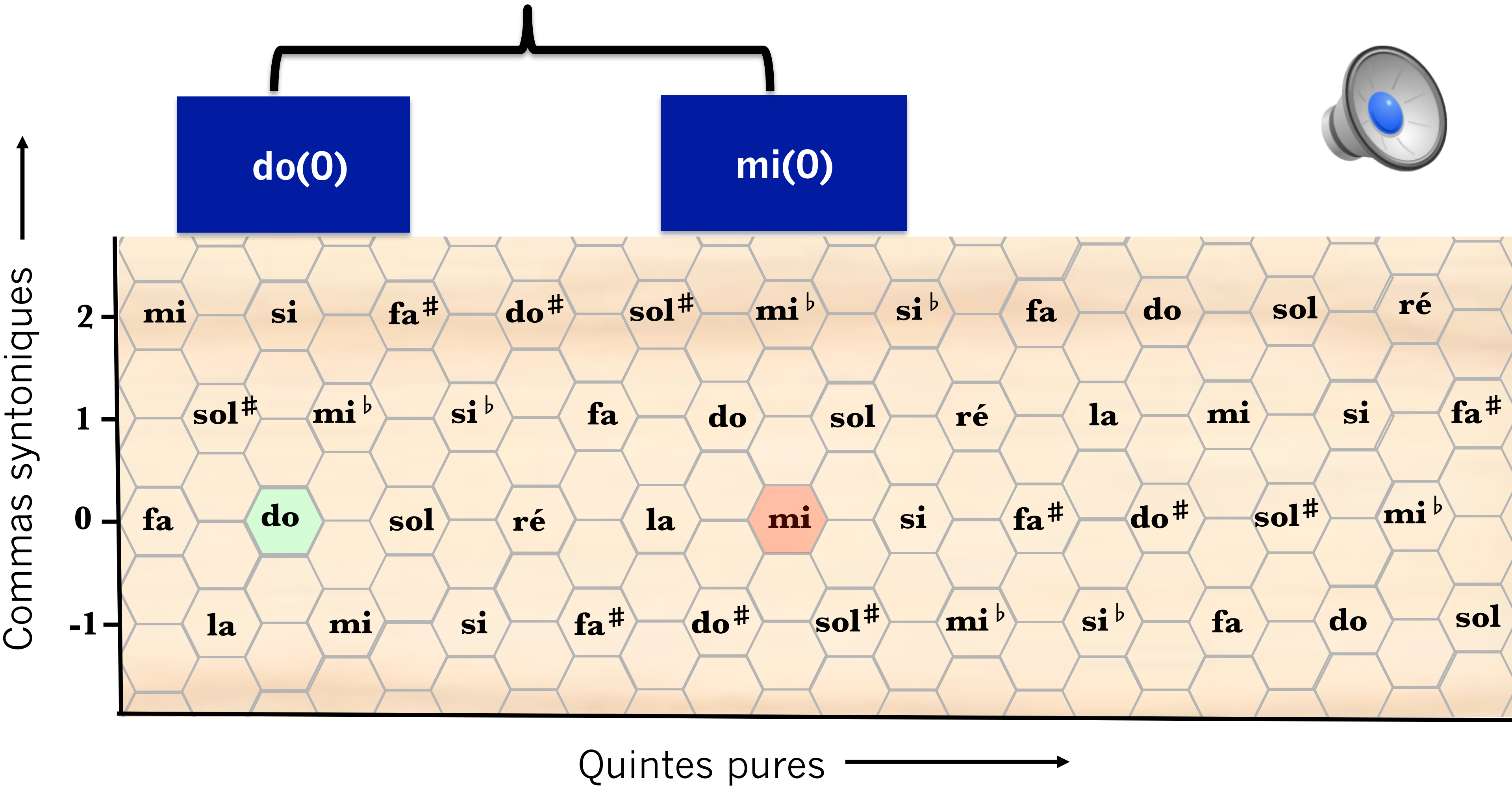
3.8 Migration tonale de musiciens qui chantent des intervalles justes

La cause: Modulation de la Tonalité dans l'Oeuvre

Schéma des quintes et tierces justes

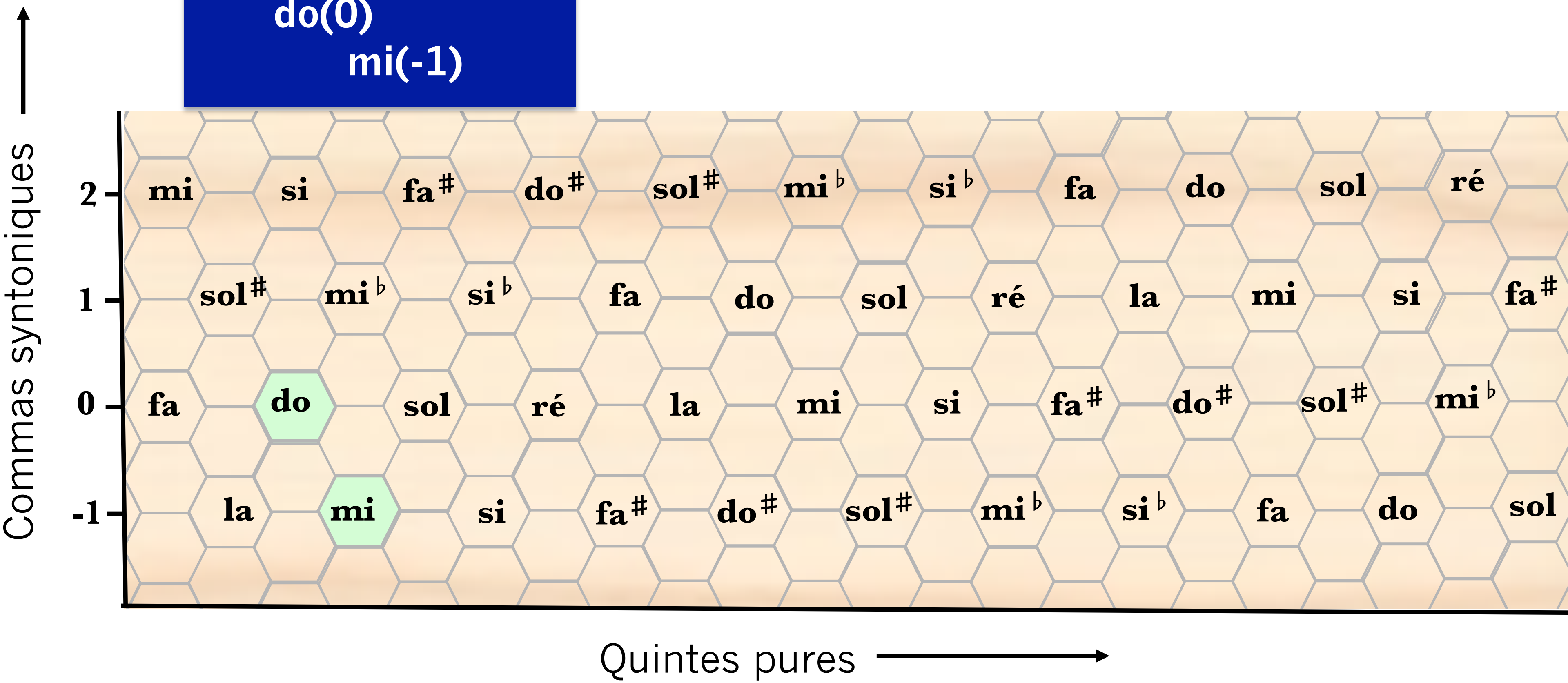


4 quintes = 2 octaves + 1 tièrce majeure + 1 comma syntonique

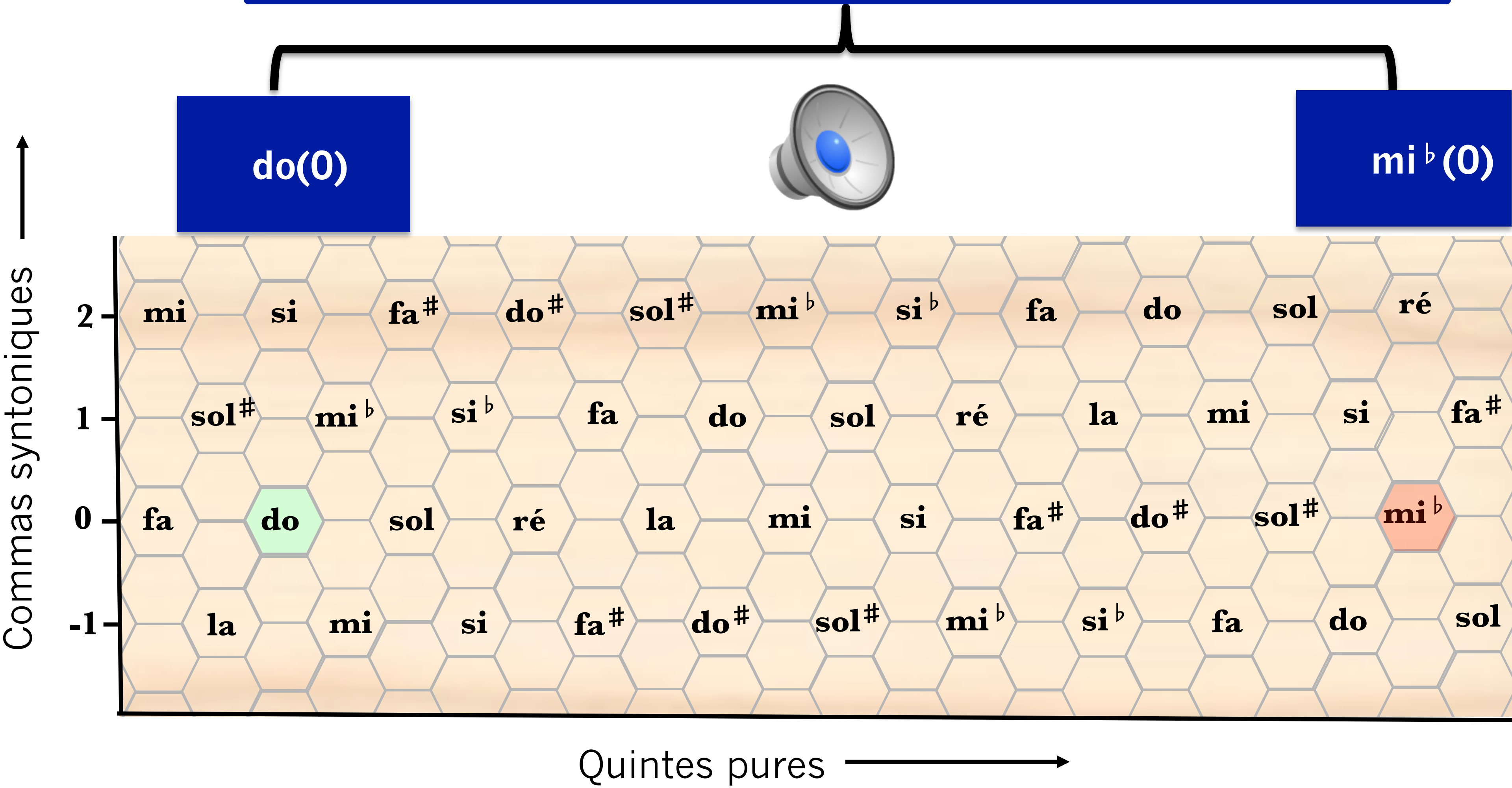


1 tièrce majeure

do(0)
mi(-1)

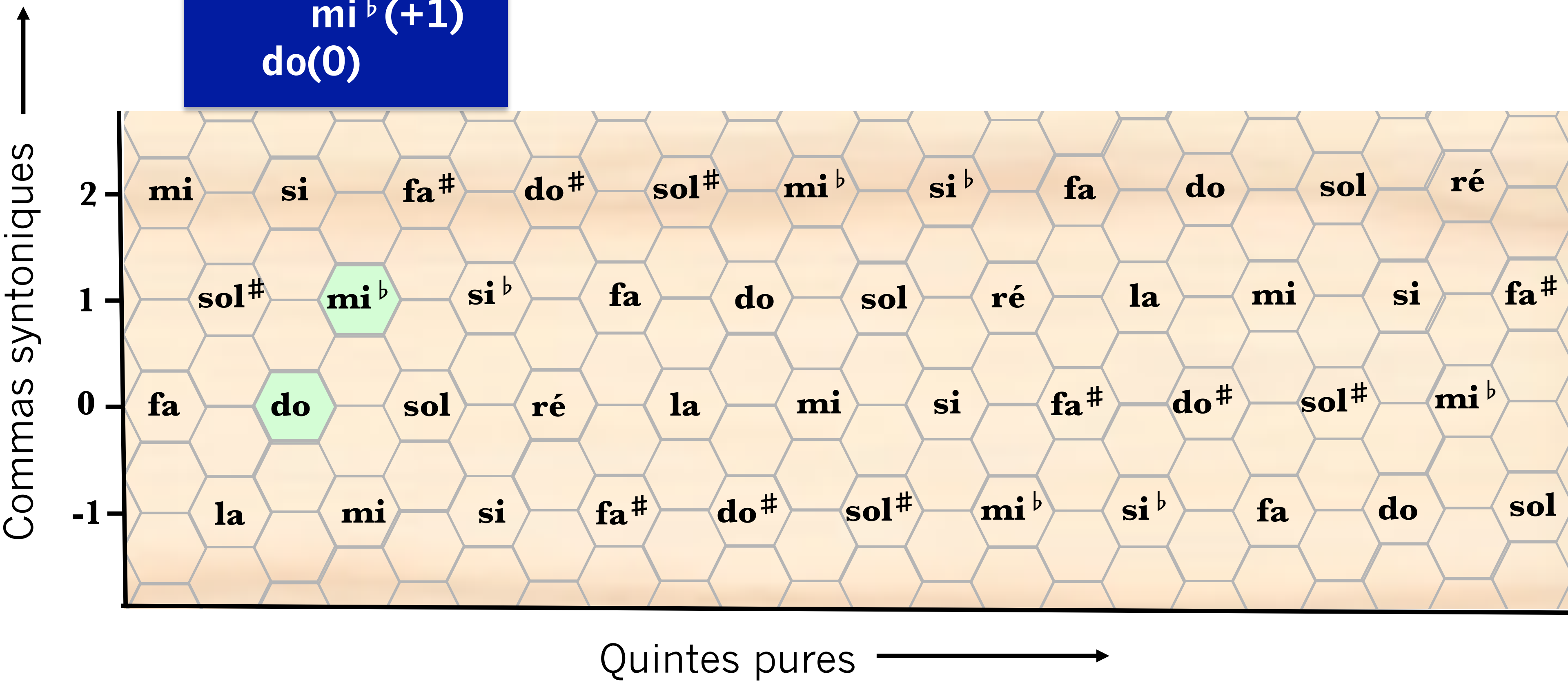


9 quintes = 5 octaves + 1 tièrce mineure – 1 comma syntonique

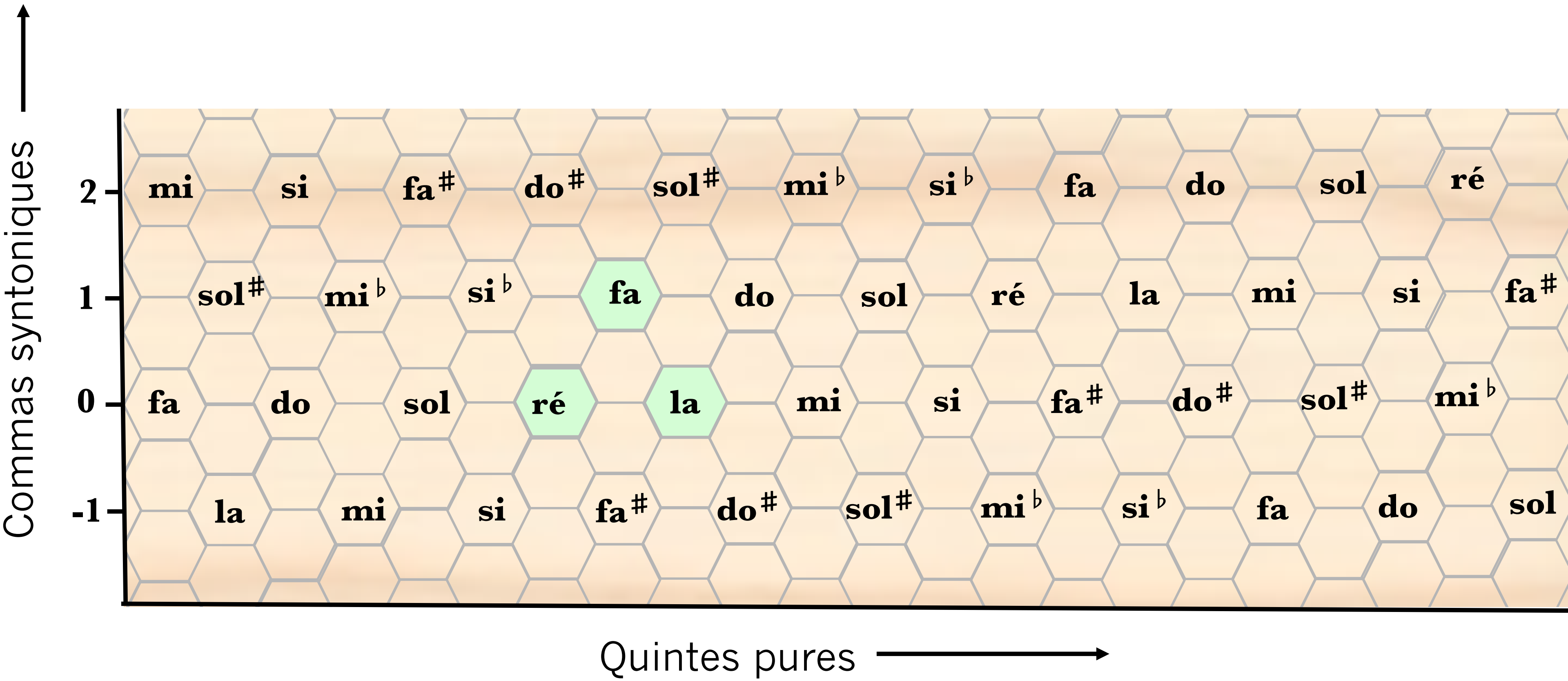


1 tièrce mineure

mi♭(+1)
do(0)

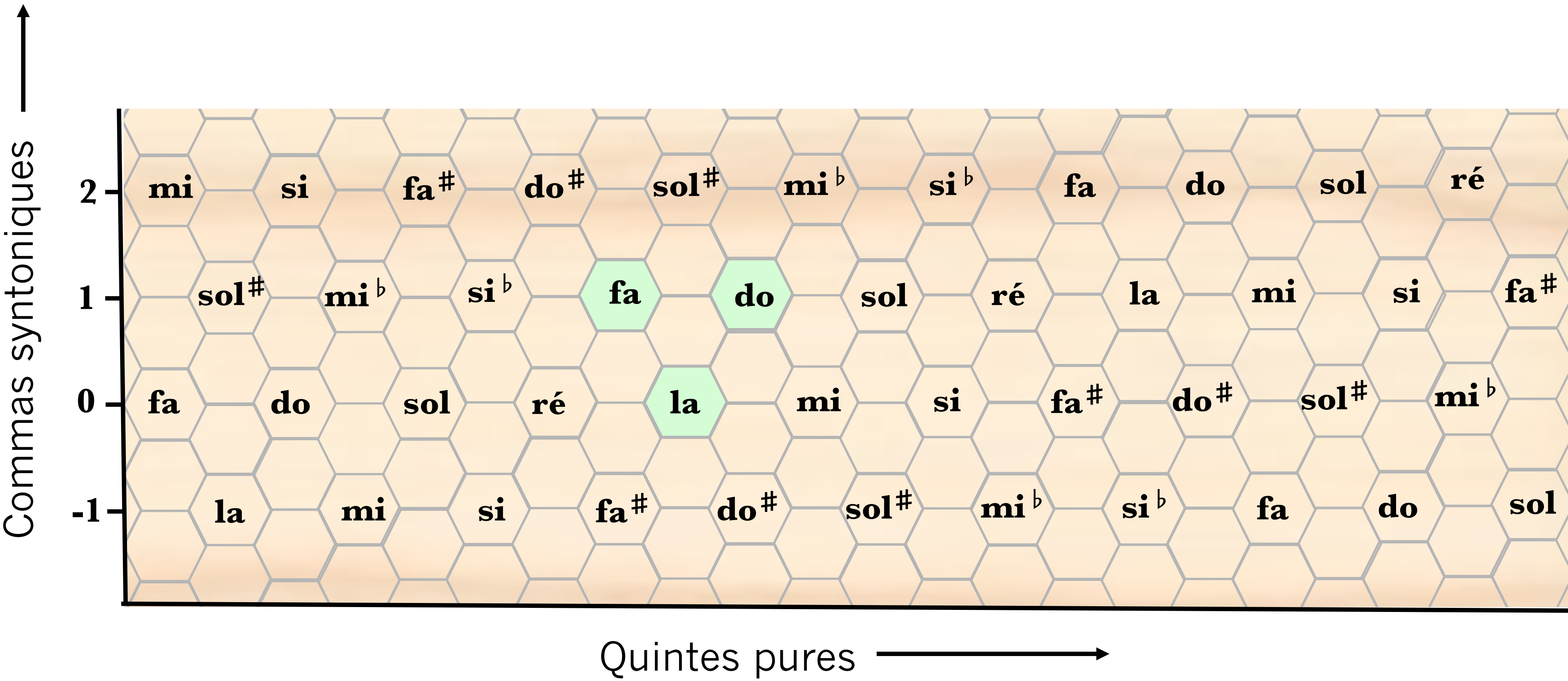


ré(0) - mineur



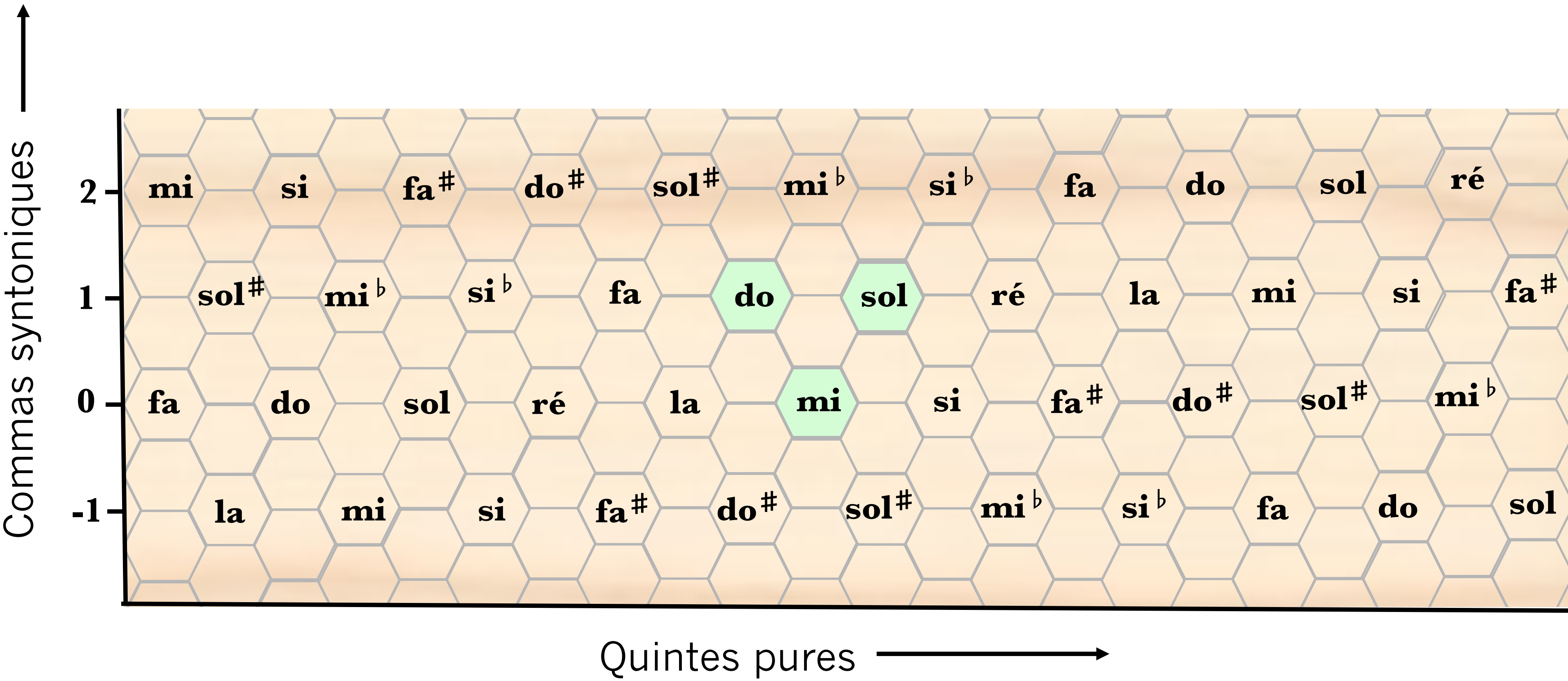
Commas syntoniques
2
1
0
-1
mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭ si♭ fa do sol ré
sol♯ mi♭ si♭ fa do sol ré la mi si fa♯
fa do sol ré la mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭
la mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭ si♭ fa do sol
Quintes pures

fa(+1) – majeur

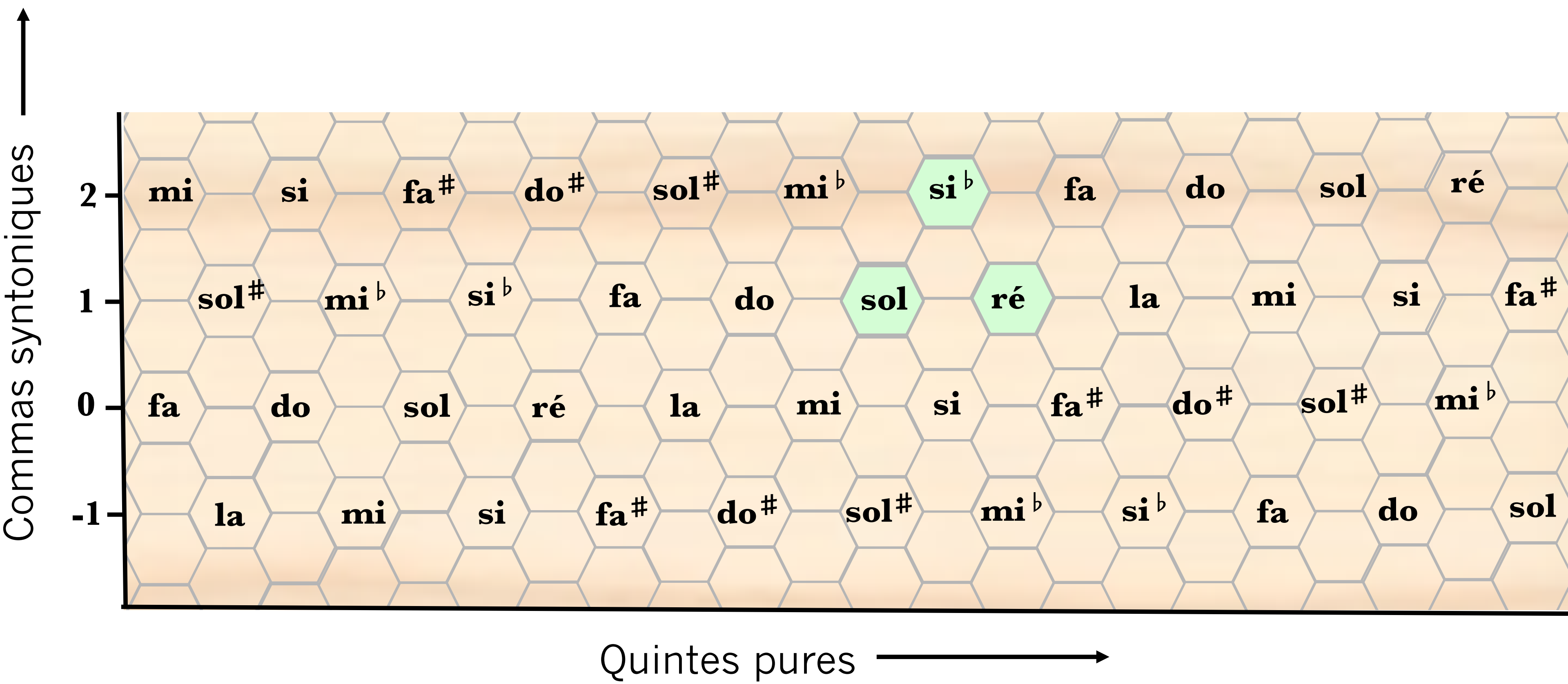


Commas syntoniques
Quintes pures
2
1
0
-1
mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭ si♭ fa do sol ré
sol♯ mi♭ si♭ fa do sol ré la mi si fa♯
fa do sol ré la mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭
la mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭ si♭ fa do sol

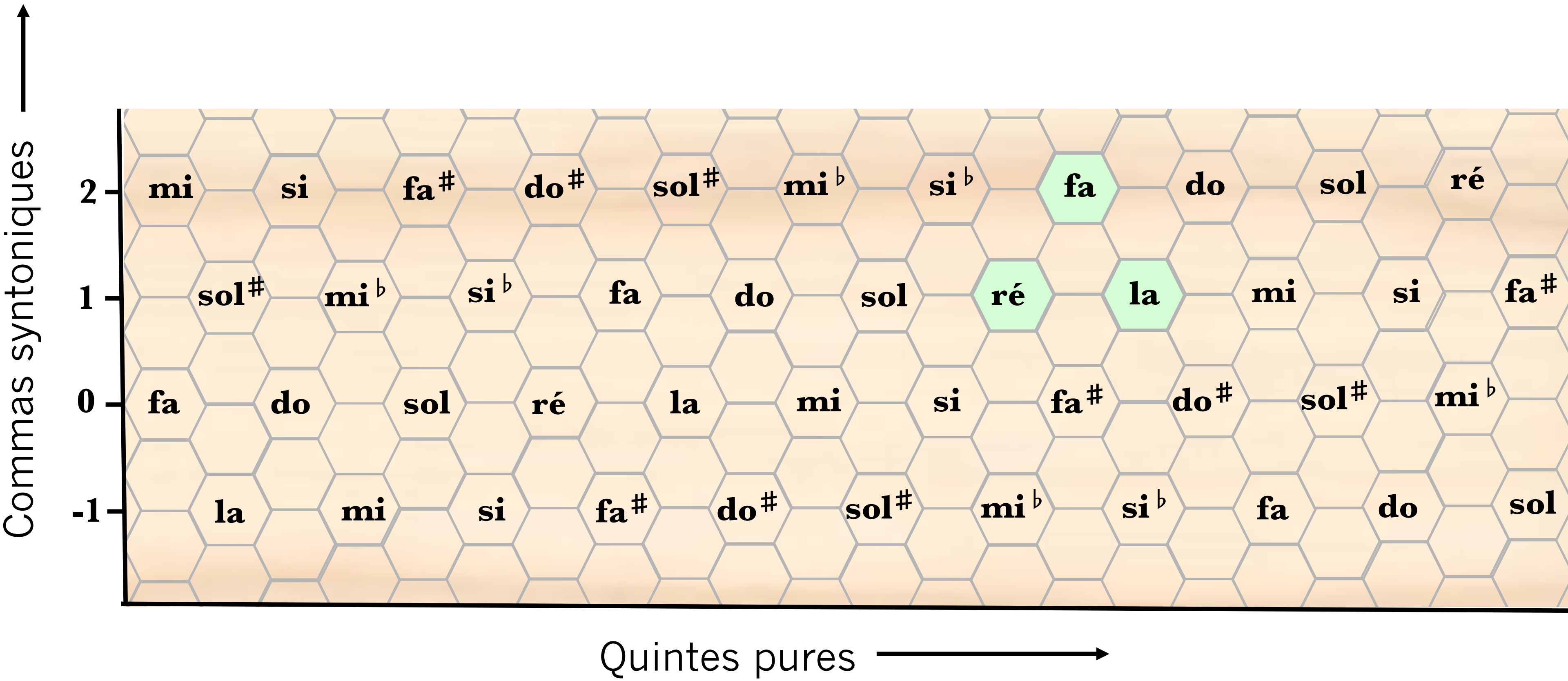
do(+1) - majeur


Commas syntoniques
2
1
0
-1
mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭ si♭ fa do sol ré
sol♯ mi♭ si♭ fa do sol ré la mi si fa♯
fa do sol ré la mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭
la mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭ si♭ fa do sol
Quintes pures

sol(+1) - mineur

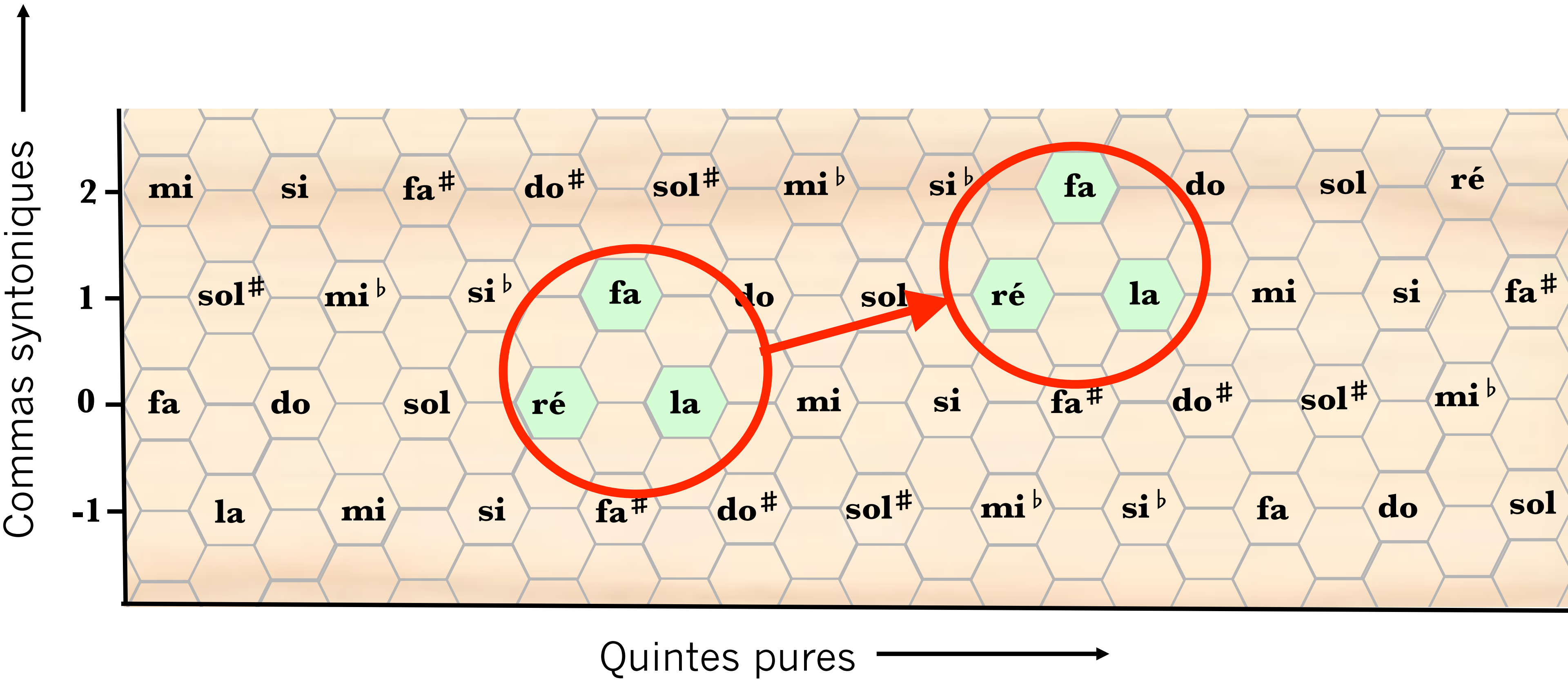

Commas syntoniques
2
mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭ si♭ fa do sol ré
1
sol♯ mi♭ si♭ fa do sol ré la mi si fa♯
0
fa do sol ré la mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭
-1
la mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭ si♭ fa do sol
Quintes pures

ré(+1) - mineur

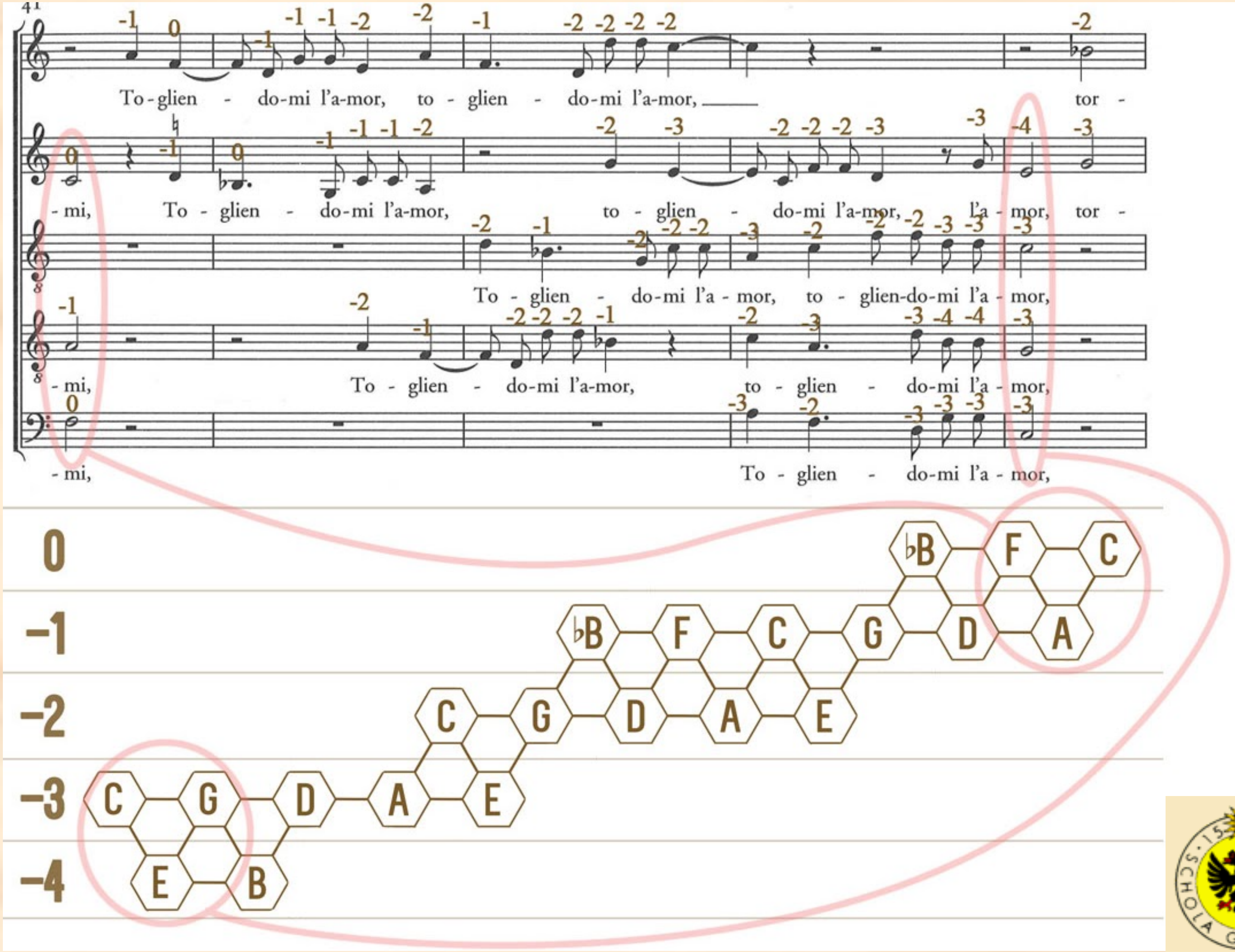


Commas syntoniques
2
1
0
-1
mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭ si♭ fa do sol ré
sol♯ mi♭ si♭ fa do sol ré la mi si fa♯
fa do sol ré la mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭
la mi si fa♯ do♯ sol♯ mi♭ si♭ fa do sol
Quintes pures

ré(0) – mineur → ré(+1) - mineur



Michaelangelo Rossi (1601-1656) “Per non mi dir”. Au cours du couplet ci-dessous le diapason migre 3 commas vers le bas. Au total la migration est de 11 commas syntoniques (3 demi-tons !)



Per non dir ch'io moia
dicemi ch'io non l'ami,
quest'empia, e par che brami,
togliendomi l'amor, tormi la noia.
S'amor è vita e gioia,
priva d'amor non morrà l'alma mia ?
donna fallace e ria
come sa ben mentir forme e colori:
tanto è dir "non amar" quanto è dir "mori"!

Pour ne pas dire que je meurs
elle me dit que je ne l'aime pas,
cette impie, et pour me donner envie,
en m’ôtant mon amour, de terminer mon chagrin.
Si l'amour est vie et joie,
mon amour ne mourra-t-il pas d'amour?
une femme fallacieuse,
comme elle sait mentir formes et couleurs:
dire "n’aime pas" n'est autre que dire "meurt"!

Michaelangelo Rossi (1601-1656) “Per non mi dir”.

Sources

- Tuning and Temperament – A historical Survey, J. Murray Barbour (dover 2017)
- How Equal Temperament Ruined Harmony (and Why You Should Care), Ross W. Duffin (Norton 2007)
- Science & Music, Sir James Jeans (Cambridge 1937)
- Physics and Music, The Science of Musical Sound, HE White and DH White (Dover 2017)
- On the Sensations of Tone, Hermann Helmholtz (Longmans 1885)
- Early Music Sources: Elam Rotem (www.quintaprofeti.com), Jörg-Andreas Bötticher (www.jaboetticher.ch), https://www.earlymusicsources.com
- https://fr.wikipedia.org
- https://imslp.org/